

Math. A.

324

m/2

Kleyers Encyklopädie.



Lehrbuch

DES

Projektionszeichnens

II. Teil

VON

Prof. J. Vonderlinn

Maty. A. 324 ^m (2

Kleyers



Encyklopädie



der gesamten

mathematischen, technischen und exakten
Natur-Wissenschaften.

Abteilung:

Das Projektionszeichnen.

Kleyers

Encyklopädie

Naturwissenschaften, technischen und exacten
Kunstwissenschaften

Abteilung

Das Projektionszeichnen

^C
Lehrbuch
des
Projektionszeichnens.

Zweiter Teil:
**Ueber die rechtwinklige Projektion ebenflächiger
Körper.**

Mit 130 Erklärungen und 99 in den Text gedruckten Figuren.

Für den Schulunterricht und das Selbststudium

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Professor J. Vonderlinn,
dipl. und staatlich geprüfter Ingenieur

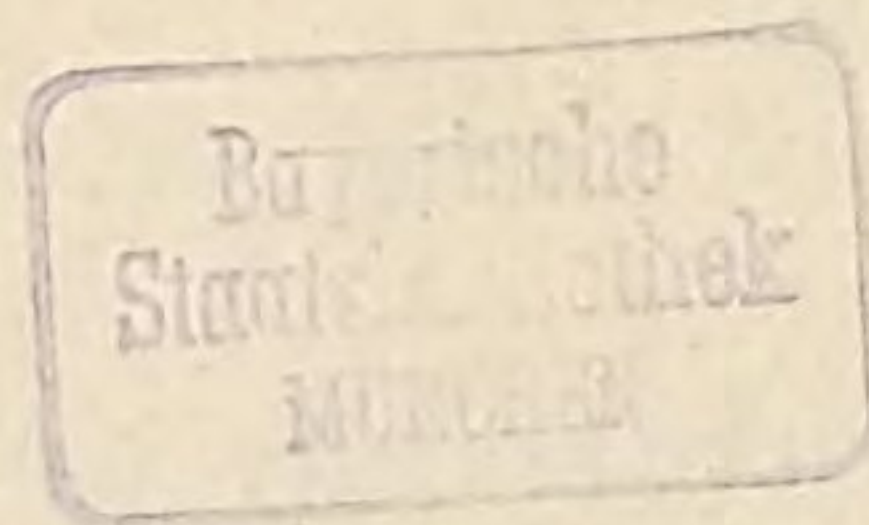


[1889]

Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Gso. 32224



V o r w o r t.

Die durchweg günstige und freundliche Aufnahme, welche dem ersten Bande meines Lehrbuchs über „Projektionszeichnen“ sowohl in der diesbezüglichen Fachpresse als auch von Seiten des lesenden Publikums zu teil geworden ist, ermutigt mich zu der Hoffnung, es möge auch dem vorliegenden zweiten Bande ein gütiges Wohlwollen bei der Beurteilung in den einschlägigen Kreisen entgegengebracht werden.

Als Bestandteil der Kleyer'schen Encyklopädie ist das Buch vornehmlich zum Selbststudium bestimmt. Letzterer Zweck bedingt aber eine grössere Ausführlichkeit in der Behandlung der vorgetragenen Lehren als dies in anderen Lehrbüchern, die etwa als Leitfaden zu Vorlesungen etc. dienen, der Fall zu sein braucht, sowie eine reichliche Beigabe von Übungsmaterial in Form von teils gelösten teils ungelösten Aufgaben.

Die meinem ersten Buche von einer Seite der Kritik zum Vorwurf gemachte Weitschweifigkeit ist bedingt durch den Zweck des Buchs und ich bin überzeugt, dass der Anfänger, welcher erst in das Gebiet der Geometrie eingeführt werden soll und dem in den meisten Fällen hinlängliche Vorkenntnisse fehlen, diese Weitschweifigkeit dankbar begrüsst. Aufgabe und Zweck der Kleyer'schen Encyklopädie besteht darin, die Wissenschaft in möglichst ausführlicher, dabei doch einfacher und klarer Weise zur Kenntnis des Lesers zu bringen.

Der Inhalt des vorliegenden Bandes, welcher lediglich von der rechtwinkligen Projektion ebenflächiger Körper handelt, schliesst sich als unmittelbare Fortsetzung an den Inhalt des ersten Bandes an. Gewissermassen als praktische Anwendung der kennen gelernten

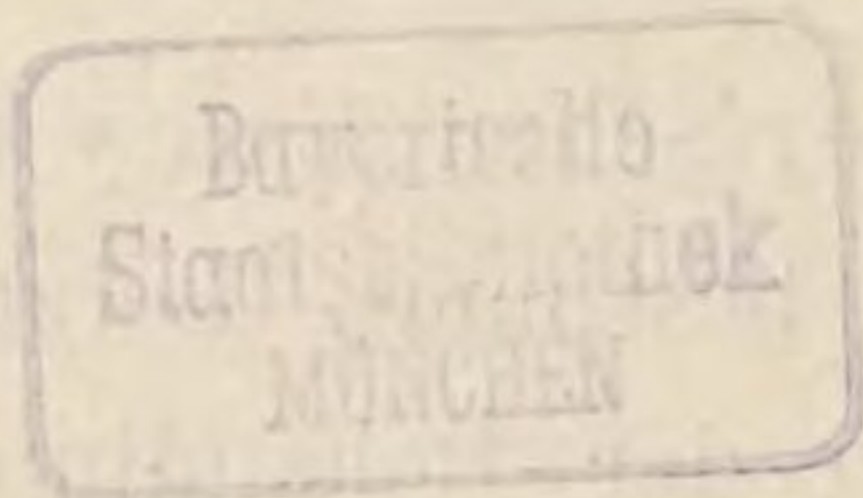
Konstruktionen über die gegenseitigen Durchdringungen von Geraden, Ebenen und Körpern habe ich die „Selbst- und Schlagschattenbestimmung“ ebengennannter Raumgrößen beigefügt.

In dem nächstfolgenden dritten Bande soll die schiefe Parallelprojektion sowie die Centralprojektion dieser Raumgrößen zum Vortrage gelangen.

Indem ich den zweiten Band meines Lehrbuchs über Projektionszeichnen der Öffentlichkeit übergebe, drängt es mich, auch bei dieser Gelegenheit der geehrten Verlagshandlung für die überaus sorgfältige Ausstattung des Buchs hiermit meinen verbindlichsten Dank zum Ausdruck zu bringen.

München, Juli 1889.

J. Vonderlinn.



Berichtigungen.

Seite 47 Zeile 14 lies: Seitenkanten statt: Seitenflächen.

„ 48 „ 39 „ Seitenfläche „ Seitenflächen.

„ 58 „ 8 „ W''' und W'''' „ w''' und w'''' .

„ 144 „ 30 „ Aufgabe 69 a „ Aufgabe 67.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
1) Ueber die rechtwinklige Projektion des Dreikants	1
A) Ueber den Begriff und die zur Herstellung seiner Projektionen wichtigsten Eigenschaften des Dreikants	1
B) Lösung der sechs Fundamentalaufgaben über das Dreikant. .	6
C) Ueber die Ermittlung der wahren Grössen der Seiten- und Flächenwinkel eines Dreikants in allgemeiner Lage gegen die Pr. Ebn. E_1 und E_2	16
D) Gelöste Aufgaben, in welchen Dreikants-Konstruktionen zur Anwendung kommen	18
2) Ueber die rechtwinklige Projektion von Körpern	20
A) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Körpers im allgemeinen	20
a) Ueber den Begriff: „Projektion und Umriss“ eines Körpers.	20
b) Ueber die Ermittlung der sichtbaren und unsichtbaren Kantenprojektionen eines Körpers	21
c) Ueber den Zusammenhang zwischen der Zahl der Projektionen von sicht- baren und unsichtbaren Flächen, Ecken und Kanten eines Polyeders, sowie der Flächen, Ecken und Kanten überhaupt	22
d) Ueber die Zahl der Bestimmungsstücke zur Darstellung der Projektionen eines Polyeders	24
B) Ueber die rechtwinklige Projektion von Pyramiden und Prismen .	25
a) Ueber den Begriff einer „Pyramide“ und eines „Prismas“, sowie die für die Herstellung der Projektionen dieser Körper wichtigsten Eigenschaften derselben	25
b) Ueber die Zeichnung der Projektionen und des Netzes einer Pyramide und eines Prismas aus gegebenen Bestimmungsstücken	26
c) Gelöste Aufgaben über die Pyramide	34
d) Ungelöste Aufgaben über die Pyramide	46
e) Gelöste Aufgaben über das Prisma	49
f) Ungelöste Aufgaben über das Prisma	57
3) Ueber die Bestimmung des Schnittes von Ebenen und Geraden mit Pyra- miden und Prismen	58
A) Schnitt zwischen Ebene und Pyramide, Eigenschaften ebener Pyra- midenschnitte und deren Projektionen.	58
a) Ueber die Bestimmung des Schnittes einer Ebene mit einer Pyramide. .	58
B) Ueber die Bestimmung des Schnittes einer unbegrenzten Ebene mit einem Prisma	68
C) Ungelöste Aufgaben	72
D) Ueber die Bestimmung des Schnittes einer Geraden mit Pyramiden und Prismen	75
a) Schnitt einer Geraden mit einer Pyramide	75
b) Schnitt einer Geraden mit einem Prisma	76

E) Ueber die Bestimmung des Schnittes von begrenzten Ebenen, d. i. von ebenen Vielecken mit Pyramiden und Prismen	76
a) Schnitt einer begrenzten Ebene mit einer Pyramide	77
b) Schnitt einer begrenzten Ebene mit einem Prisma	78
c) Ungelöste Aufgaben	80
4) Ueber die Bestimmung des Schnittes zweier der Körper „Prisma“ und „Pyramide“	81
A) Schnitt zweier Prismen	81
B) Schnitt eines Prismas und einer Pyramide	88
C) Schnitt zweier Pyramiden	90
5) Ueber die rechtwinklige Projektion der regulären und halbrekulären Körper (Polyeder)	92
A) Ueber die regulären Körper im allgemeinen	92
B) Einige Bemerkungen über den goldenen Schnitt	94
C) Ueber die Konstruktion der Projektionen und Netze der fünf regulären (platonischen) Körper bei gegebener Kantenlänge	96
D) Ungelöste Aufgaben über reguläre Polyeder	107
E) Ueber die Konstruktion der Projektionen der sternförmigen regu- lären Polyeder	109
F) Ueber die halbrekulären Körper	114
6) Ueber die rechtwinklige Projektion allgemeiner Polyeder, sowie deren Schnitt mit Ebenen, Geraden und unter sich	124
A) Ueber die rechtwinklige Projektion des Stumpfes	124
B) Gelöste Aufgaben	125
C) Ungelöste Aufgaben	127
D) Schnitt von Ebenen und Geraden mit beliebigen Polyedern sowie zweier Polyeder unter sich	128
E) Ungelöste Aufgaben	130
7) Ueber die Konstruktion der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Punkten, Linien, ebenen Flächen und ebenflächigen Körpern	131
A) Ueber die Richtung der Lichtstrahlen	132
B) Ueber die Konstruktion der Schlagschatten von Punkten, Linien und ebenen, von Linien begrenzten Figuren	133
a) Schlagschatten eines Punktes	133
b) Schlagschatten einer Geraden	133
c) Schlagschatten einer ebenen Figur	134
d) Gelöste Aufgaben	135
e) Ungelöste Aufgaben	138
f) Schlagschatten einer Linie auf eine Fläche	138
C) Ueber die Konstruktion der Selbst- und Schlagschatten- grenzen ebenflächiger Körper	140
a) Selbstschatten ebenflächiger Körper	140
b) Schlagschatten ebenflächiger Körper	142
c) Ueber die Bedeutung der Schattenkanten in technischen Zeichnungen	143
d) Gelöste Aufgaben	144
e) Ungelöste Aufgaben	152
8) Andeutungen zu den Lösungen der ungelösten Aufgaben	153—172

Das Projektionszeichnen.

II. Teil.

1) Ueber die rechtwinklige Projektion des Dreikants.

A) Ueber den Begriff und die zur Herstellung seiner Projektionen wichtigsten Eigenschaften des Dreikants.

Frage 1. Was versteht man unter einem Dreikant?

Erkl. 1. Der den drei Geraden AA' , BB' , CC' gemeinsame Punkt s bildet für jedes Dreikant den Scheitel oder die Spitze. Die das Dreikant begrenzenden Linien und Ebenen heissen die Kanten und Seiten des Dreikants.

Man bezeichnet zweckmässig ein Dreikant mit dem Scheitel s und den Kanten A , B , C als Dreikant $s(ABC)$.

Die von den Kanten eingeschlossenen Winkel heissen die Kanten- oder Seitenwinkel, im Gegensatz zu den Winkeln der drei Ebenen des Dreikants, welche man Flächenwinkel nennt.

Erkl. 2. Ein Dreikant hat nach obigem drei Seiten- und drei Flächenwinkel; erstere bezeichnet man gewöhnlich durch die beiden den Winkel einschliessenden Kanten, letztere durch jene Kante, welche den beiden den Winkel einschliessenden Ebenen gemeinsam ist; man verbindet dabei im ersten Fall die beiden Buchstaben durch einen Winkelhaken, während im zweiten Fall der Winkelhaken über dem den Winkel bezeichnenden Buchstaben angebracht wird.

Demnach schliessen die Kanten A , B , C die Seitenwinkel $\hat{AB}$, $\hat{AC}$ und $\hat{BC}$, die Ebenen AB , AC und BC aber die Flächenwinkel $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ ein.

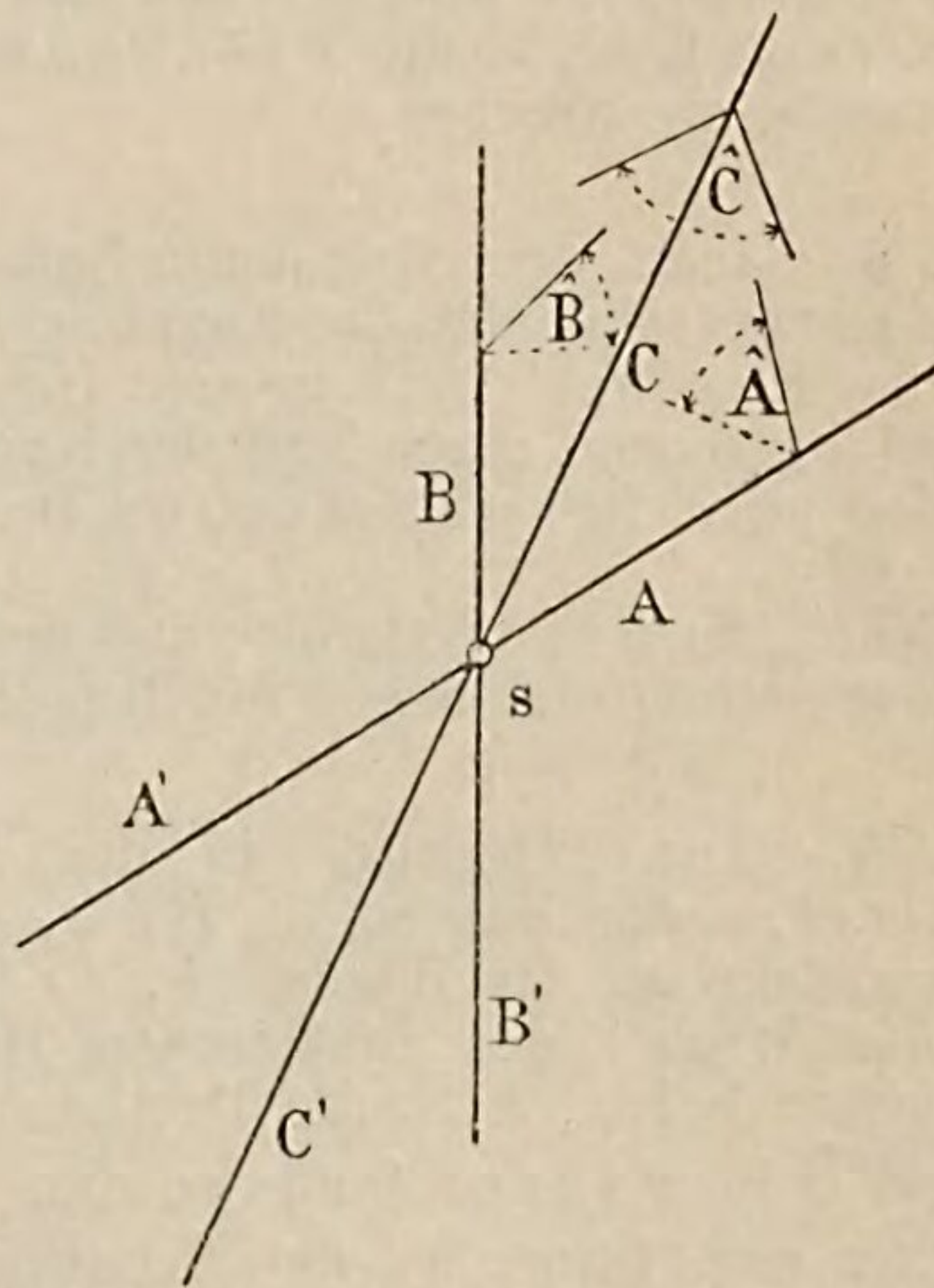
Erkl. 3. Durch drei Ebenen AB , AC und BC entstehen im ganzen acht Dreikante:

- 1) $s(ABC)$
- 2) $s(A'B'C')$
- 3) $s(ABC')$
- 4) $s(ACB')$
- 5) $s(BCA')$
- 6) $s(A'BC)$
- 7) $s(A'C'B)$
- 8) $s(B'C'A)$.

Erkl. 4. Die Dreikante 1 und 2 liegen so, dass die über s hinaus verlängerten Kanten des einen Dreikants die Kanten des anderen

Antwort. Führt man durch einen Punkt s im Raume, siehe Figur 1, drei beliebige Ebenen, so treffen sich diese nach dreien im Punkte s in zwei unendlich grosse Hälften getheilten Geraden AA' , BB' , CC' . Je drei dieser Hälften bestimmen im Verein mit den oben genannten Ebenen im Punkte s eine dreiseitige körperliche Ecke, welche man Dreikant nennt.

Figur 1.



geben; man nennt sie deshalb Scheiteldreikante. In beiden Dreikanten sind die Seiten- und Flächenwinkel bezw. einander gleich. Doch können die Dreikante nicht zur Deckung gebracht werden; sie sind nicht kongruent, wohl aber symmetrisch zu einander.

Die unter 3 bis 5 genannten Dreikante stehen zu dem Dreikante 1 in der Beziehung, dass sie mit letzterem einen Seitenwinkel gemeinsam haben, während die beiden anderen Seitenwinkel die noch übrigen Seitenwinkel des ersten Dreikants zu 180° ergänzen.

Diese Dreikante heissen die Nebendreikante des Dreikants $s(ABC)$. In gleicher Weise, wie die obengenannten Dreikante 3—5 aus dem Dreikant 1 entstehen, sind auch die unter 6—8 genannten Dreikante aus dem Dreikant 2 gebildet; sie heissen die Nebendreikante des Dreikants $s(A'B'C')$.

Kennt man von den obengenannten acht Dreikanten eines, so sind auch die übrigen hiedurch vollständig bestimmt.

Erkl. 5. Denkt man sich um den Scheitel s des Dreikants $s(ABC)$, siehe Figur 2, als Mittelpunkt eine Kugel von beliebigem Halbmesser beschrieben, so schneidet diese die Seiten des Dreikants nach grössten Kreisen, siehe Erkl. 6, welche ihrerseits auf der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreieck abc , siehe Erkl. 6, begrenzen, dessen Seiten, das sind die Bögen ab , ac und bc , als Mass für die Seitenwinkel dienen, während seinen Winkeln, siehe Erkl. 7, die Flächenwinkel des Dreikants entsprechen.

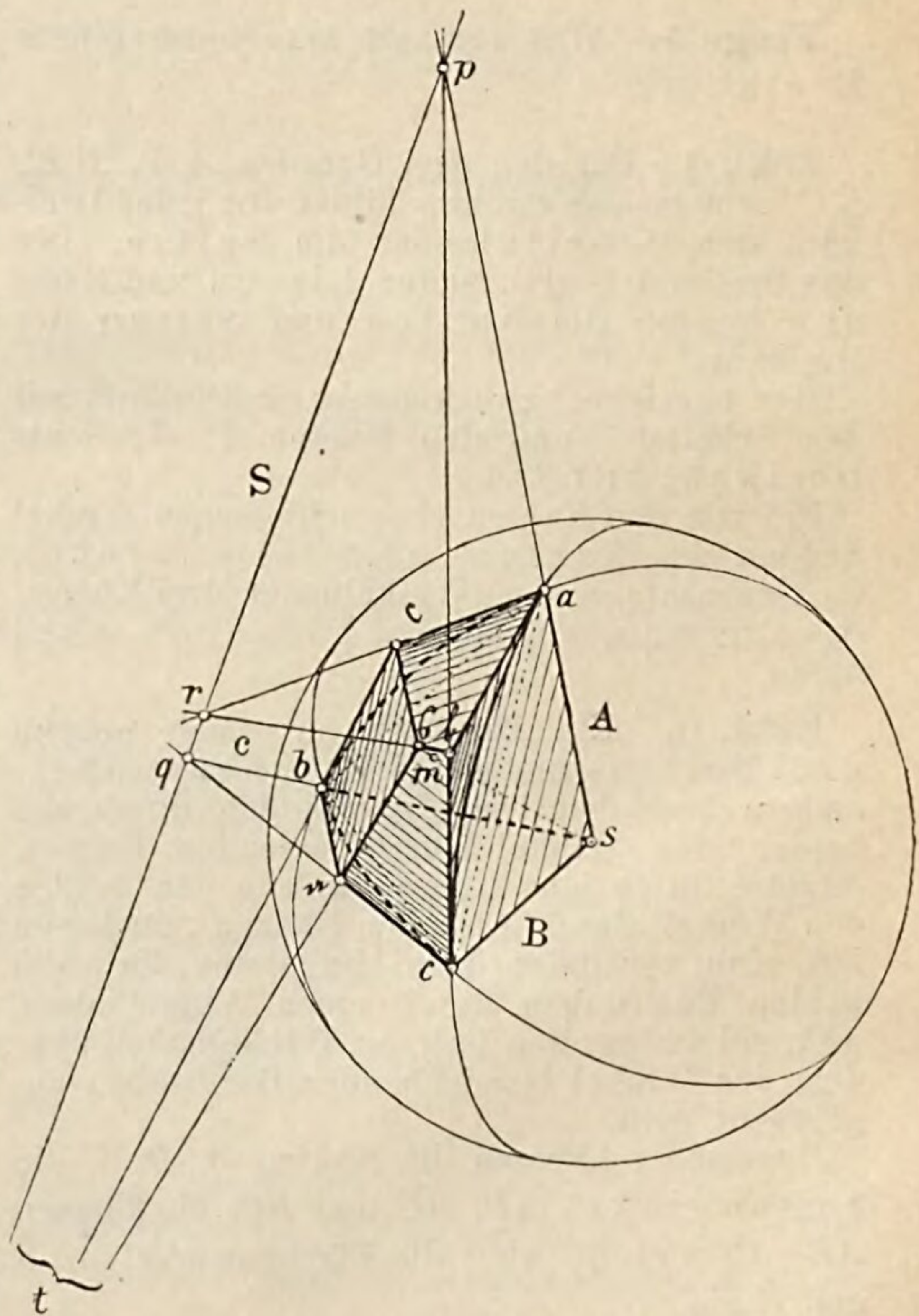
Erkl. 6. Jede den Kugelmittelpunkt enthaltende Ebene schneidet die Kugel nach einem grössten Kreise. Drei grösste Kreise auf der Kugel begrenzen einen Teil der Kugeloberfläche, den man ein sphärisches Dreieck nennt.

Das Wort „Sphäre“ stammt aus dem Griechischen (*sphaira*) und heisst die Kugel.

Erkl. 7. Die Tangenten in den Schnittpunkten a , b , c der Kanten A , B , C , mit der Kugeloberfläche an die Bögen ab , bc und ac bilden die Winkel des sphärischen Dreiecks, sie schliessen bei a , b , c die Dreikantswinkel $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ in wahrer Grösse ein.

Errichtet man ferner in den Schnittpunkten a , b , c der Tangenten in b und c , a und c , a und b Senkrechte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (sind in Figur 2 nicht bezeichnet) zu den Dreikantsseiten BC , AC und AB , so treffen sich diese in einem Punkte $\mathfrak{s}$, dem Scheitel eines neuen Dreikants $\mathfrak{s}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$, das mit dem ursprünglichen Dreikant in dem Zusammenhange steht, dass seine Seitenwinkel die Supplementwinkel bilden zu den Flächenwinkeln des ursprünglichen Dreikants und umgekehrt, wie dies leicht aus Figur 2 ersichtlich ist.

Figur 2.



Erkl. 8. Jedes der beiden Dreikante $s(ABC)$ und $s(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ heisst das Supplementar- oder auch Polardreikant des anderen.

Wenn

$$\hat{A}B, \hat{A}C, \hat{B}C, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$$

die Seiten- und Flächenwinkel des einen,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$$

die entsprechenden Grössen im andern Dreikant bezeichnen, so finden stets die folgenden Beziehungen statt:

Es ist:

$$\hat{A}B = 180^\circ - \mathfrak{C}$$

$$\hat{A}C = 180^\circ - \mathfrak{B}$$

$$\hat{B}C = 180^\circ - \mathfrak{A}$$

$$\hat{A} = 180^\circ - \mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

$$\hat{B} = 180^\circ - \mathfrak{A}\mathfrak{C}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

Erkl. 9. Da die Punkte a, b, c auf den Halbierungslinien der Winkel $\hat{B}C, \hat{A}C$ und $\hat{A}B$ liegen, die Geraden as, bs, cs aber senkrecht zu den Ebenen dieser Winkel stehen, so ist die Verbindungslinie ss als Schnittlinie der drei Ebenen $sas, sb\mathfrak{s}, sc\mathfrak{s}$ senkrecht zur Ebene abc und geht deshalb durch den Mittelpunkt m des dem Dreieck abc umbeschriebenen Kreises.

Es sind demnach sowohl die Strecken $\overline{sa}, \overline{sb}, \overline{sc}$, als auch $\overline{ma}, \overline{mb}$ und $\overline{mc}$, welche letztere Linien noch überdies senkrecht stehen zu ss , einander gleich.

Frage 2. Welches sind die wichtigsten Sätze über den Zusammenhang zwischen den Grössen der **Seiten-** und **Flächenwinkel** eines Dreikants?

Antwort. Von jedem Dreikante gelten zunächst bezüglich der Grössen seiner Seiten- und Flächenwinkel die folgenden Sätze:

1) „Die Summe der drei Seitenwinkel ist stets kleiner als 360° .“

2) „Die Summe der drei Flächenwinkel ist stets grösser als 180° .“

Beweis. Würde die Summe der Seitenwinkel 360° betragen, so erfüllten die drei Winkel $\hat{A}B, \hat{A}C$ und $\hat{B}C$ mit gemeinsamer Spitze aneinandergelegt, gerade die Ebene und könnten somit keine körperliche Ecke bilden.

Der ebengenannte Satz gilt nun in gleicher Weise auch für das Polardreikant, des gegebenen, woraus aber für letzteres unmittelbar der zweite Satz folgt. Denn es ist ja:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180 - \mathfrak{B}\mathfrak{C} + 180 - \mathfrak{A}\mathfrak{C} + 180 - \mathfrak{A}\mathfrak{B} \\ &= 540 - (\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}) \\ &> 180^\circ \text{ weil } \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} < 360^\circ \text{ ist.} \end{aligned}$$

Ein weiterer wichtiger Satz für das Dreikant ist der folgende:

3) „In jedem Dreikante ist die **Summe** bzw. **Differenz** zweier Seitenwinkel **grösser** bzw. **kleiner** als der **dritte** Seitenwinkel.“

Beweis. Der erste Teil des Satzes beweist sich unmittelbar; denn nimmt man die Kanten A und B des Seitenwinkels $\hat{A}B$ als Achsen zweier Drehungskegel mit gemeinsamer Spitze s und den Achsenwinkeln gleich $\hat{\angle} AC$ und $\hat{\angle} BC$ an, so werden diese Kegel nur dann eine gemeinsame Mantellinie besitzen, welche mit den beiden Achsen ein Dreikant mit den gegebenen Seitenwinkeln bildet, wenn die Summe der beiden Achsenwinkel grösser ist als der Winkel der beiden Achsen selbst.

Ist nun aber:

$$\hat{B}C + \hat{A}C > \hat{A}B$$

so wird jedenfalls auch einer der Winkel $\hat{B}C$ und $\hat{A}C$ grösser als die Hälfte von $\hat{A}B$ sein, somit ist, wenn $\hat{A}C > \frac{1}{2}\hat{A}B$ vorausgesetzt wird:

$$\hat{B}C + \hat{A}C > \hat{A}B,$$

daher auch:

$$\begin{aligned} \hat{B}C + \hat{A}C - 2 \cdot \hat{A}C &> \hat{A}B - 2 \cdot \hat{A}C \\ \hat{B}C - \hat{A}C &> \hat{A}B - 2 \cdot \hat{A}C \end{aligned}$$

Damit also die linke Seite obiger Gleichung grösser wird als die rechte, muss von der Grösse $\hat{A}B$ eine Grösse $2 \cdot \hat{A}C$ grösser als $\hat{A}B$ abgezogen werden, somit ist $\hat{A}B$ allein genommen sicher grösser als die Differenz $\hat{B}C - \hat{A}C$, d. h. es ist:

$$\hat{B}C - \hat{A}C < \hat{A}B.$$

Frage 3. Wie stellt man zweckmässig ein Dreikant durch seine Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 dar und wie bestimmt man in der Projektionszeichnung die wahren Grössen seiner Seiten- und Flächenwinkel?

Antwort. Behufs einfacher Gestaltung der Projektionen eines Dreikants nimmt man, wenn über die Lage der **Pr. Ebn.** gegen das Dreikant keine besonderen Bestimmungen getroffen sind, die **Pr. Eb.** E_1 stets mit einer Seitenfläche, etwa mit AB zusammenfallend, an, siehe Figur 3, und stellt die **Pr. Eb.** E_2 senkrecht zur Kante A . Man erhält hiedurch sowohl den Seitenwinkel $\hat{A}B$, sowie den Flächenwinkel $\hat{A}$ in der Projektionszeichnung, siehe Figur 3, unmittelbar in wahrer Grösse.

Erkl. 10. Kennt man von einem Dreikant $s(ABC)$ von den sechs Grössen $\hat{AB}$, $\hat{AC}$, $\hat{BC}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ je drei derselben, so lassen sich sowohl die Projektionen, wie auch die übrigen nicht bekannten Seiten und Flächenwinkel des Dreikants in wahrer Grösse in der Projektionszeichnung herstellen.

Oben genannte sechs Grössen, die Bestimmungsstücke des Dreikants, lassen sich sechsmal zu je Dreien in verschiedener Weise gruppieren, so dass man sechs Fundamentalaufgaben über das Dreikant bilden kann.

Die beiden übrigen Seitenwinkel $\hat{AC}$ und $\hat{BC}$ ergeben sich durch Umlegung der Ebenen AC und BC um ihre Spuren A_1 und B_1 in die **Pr. Eb.** E_1 , zu welchem Zwecke man auf der Kante C einen Punkt p beliebig, etwa gleich so wählt, dass p_1 in der X -Achse liegt, und seine Umlegungen p' und p'' mittels der Konstruktionsdreiecke $p_2p_1s_2$ und p_2p_1p' [$p_1p' = p_1p$, $pp'' = p'p_2$] bestimmt. Die Umlegungen C' und C'' bilden mit A_1 bzw. B_1 die Winkel $\hat{AC}$ und $\hat{BC}$ in wahrer Grösse, während in dem Konstruktionsdreiecke p_2p_1p' bei p' der Flächenwinkel $\hat{B}$ enthalten ist.

Der dritte Flächenwinkel bestimmt sich, wie in Antwort auf Frage 84, I. Teil, als Winkel der Schnittlinien einer zur Kante C senkrechten Ebene E' mit den Ebenen AC und BC .

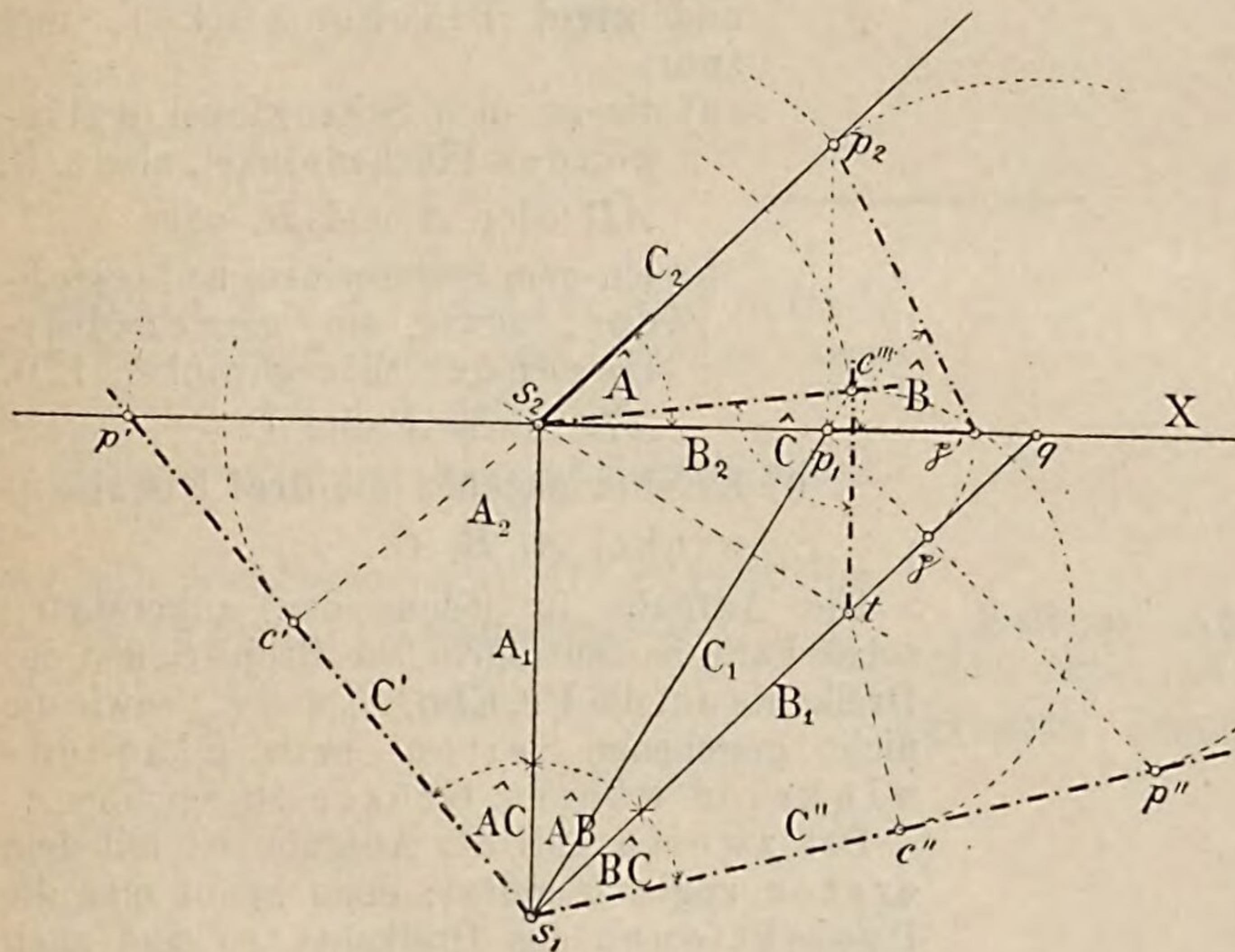
Die Konstruktion vereinfacht sich im vorliegenden Fall insofern, als man nur, wenn s_2t die zu C_1 senkrechte Spur der Ebene E' darstellt, durch s_2 und t Senkrechte s_2c' und tc'' zu C' und C'' zu fällen und mit diesen Linien, welche den umgelegten Schnittlinien der Ebene E' mit den Ebenen AC und BC entsprechen, ein Dreieck $s_2c''t$ zu konstruieren hat. Der Winkel bei c'' in diesem Dreieck ist gleich der wahren Grösse des dritten Flächenwinkels $\hat{C}$.

Nunmehr sind sowohl die Seiten- als auch die Flächenwinkel des Dreikants in wahrer Grösse bekannt. Ihre Supplemente geben die entsprechenden Flächen- und Seitenwinkel des Supplementar- oder Polardreikants.

In der Projektionszeichnung, siehe Figur 3, ergeben sich noch folgende Genauigkeitsproben.

Da sowohl die Strecke s_1p' als auch s_1p'' die wahre Grösse der Strecke sp bezeichnet, so folgt, dass $s_1p' = s_1p''$ sein muss; desgleichen sind die Entfernungen des Schnittpunktes q von B_1 mit der X -Achse von den Punkten p_2 und p'' gleich gross. Man hätte somit den Punkt p'' in Rücksicht auf die eben genannten Gleichheiten auch ohne Zuhilfenahme des Konstruktionsdreiecks p_2p_1p' , als Schnittpunkt zweier um die Mittelpunkte s_1 und q mit den Halbmessern s_1p' und qp_2 beschriebenen Kreise erhalten können.

Figur 3.



B) Lösung der sechs Fundamentalaufgaben über das Dreikant.

Frage 4. Wie heissen die sechs Fundamentalaufgaben über das Dreikant?

Antwort. Die sechs Fundamentalaufgaben über das Dreikant sind die folgenden:

- 1) Es sind gegeben die **drei** Seitenwinkel $\hat{A}B$, $\hat{A}C$ und $\hat{B}C$.
- 2) u. 3) Es sind gegeben **zwei** Seitenwinkel und **ein** Flächenwinkel, und zwar:
 - a) der von den Seitenwinkeln eingeschlossene Flächenwinkel, also z. B. $\hat{A}B$, $\hat{A}C$ und $\hat{A}$, oder
 - b) der einem der Seitenwinkel gegenüberliegende Flächenwinkel, z. B. $\hat{A}B$, $\hat{A}C$ und $\hat{B}$.
- 4) u. 5) Es sind gegeben **ein** Seitenwinkel und **zwei** Flächenwinkel, und zwar:
 - a) die an dem Seitenwinkel anliegenden Flächenwinkel, also z. B. $\hat{A}B$ oder $\hat{A}$ und $\hat{B}$, oder
 - b) ein dem Seitenwinkel anliegender, sowie ein gegenüberliegender Flächenwinkel, z. B. $\hat{A}B$ sowie $\hat{A}$ und $\hat{C}$.
- 6) Es sind gegeben die **drei** Flächenwinkel $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

Die Aufgabe in jedem der angeführten sechs Fälle besteht darin, die Projektionen des Dreikants auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 , sowie die nicht gegebenen Seiten- bzw. Flächenwinkel in wahrer Grösse zu zeichnen.

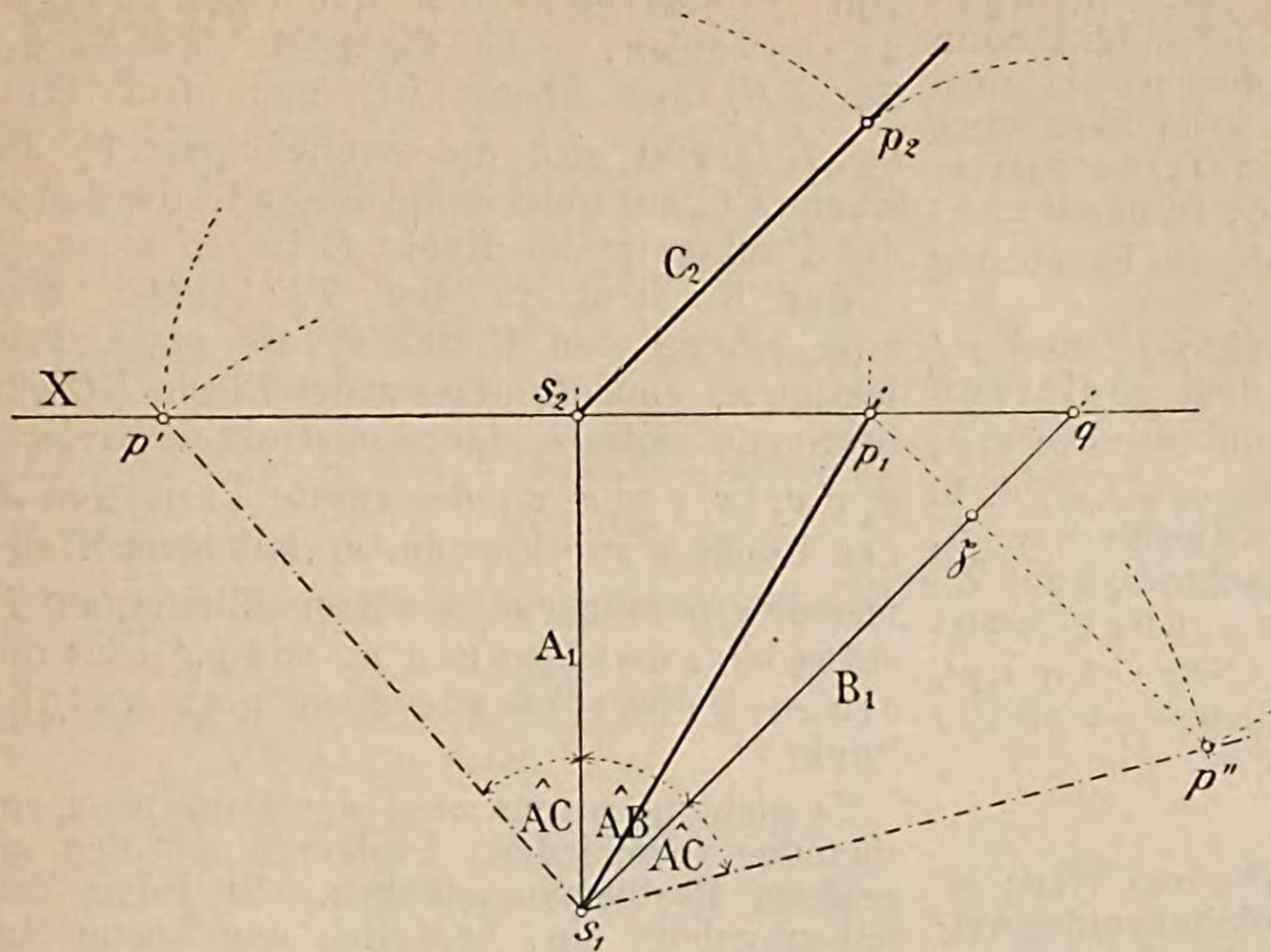
Der zweite Teil der Aufgabe ist mit dem ersten zugleich gelöst; denn kennt man die Projektionen des Dreikants, so sind auch seine Seiten- und Flächenwinkel, wie in Antwort der Frage 3 in wahrer Grösse bestimmbar.

Im folgenden werden daher nur die Projektionen des Dreikants aus den gegebenen Bestimmungsstücken hergestellt.

Aufgabe 1. Erster Dreikantsfall.
Es sind gegeben die drei Seitenwinkel $\hat{A}B$, $\hat{A}C$ und $\hat{B}C$.

Auflösung und Konstruktion. Man lege die drei gegebenen Seitenwinkel von einem Punkte s_1 , siehe Figur 4, aus so in die **Pr. Eb.** E_1 , dass die Winkel $\hat{A}B$ und $\hat{A}C$ die Kante A_1 , $\hat{A}B$ und $\hat{B}C$ die Kante B_1 gemeinsam haben, und wähle die **Pr. Eb.** E_2 senkrecht zu A , so erhält man unmittelbar

Figur 4.



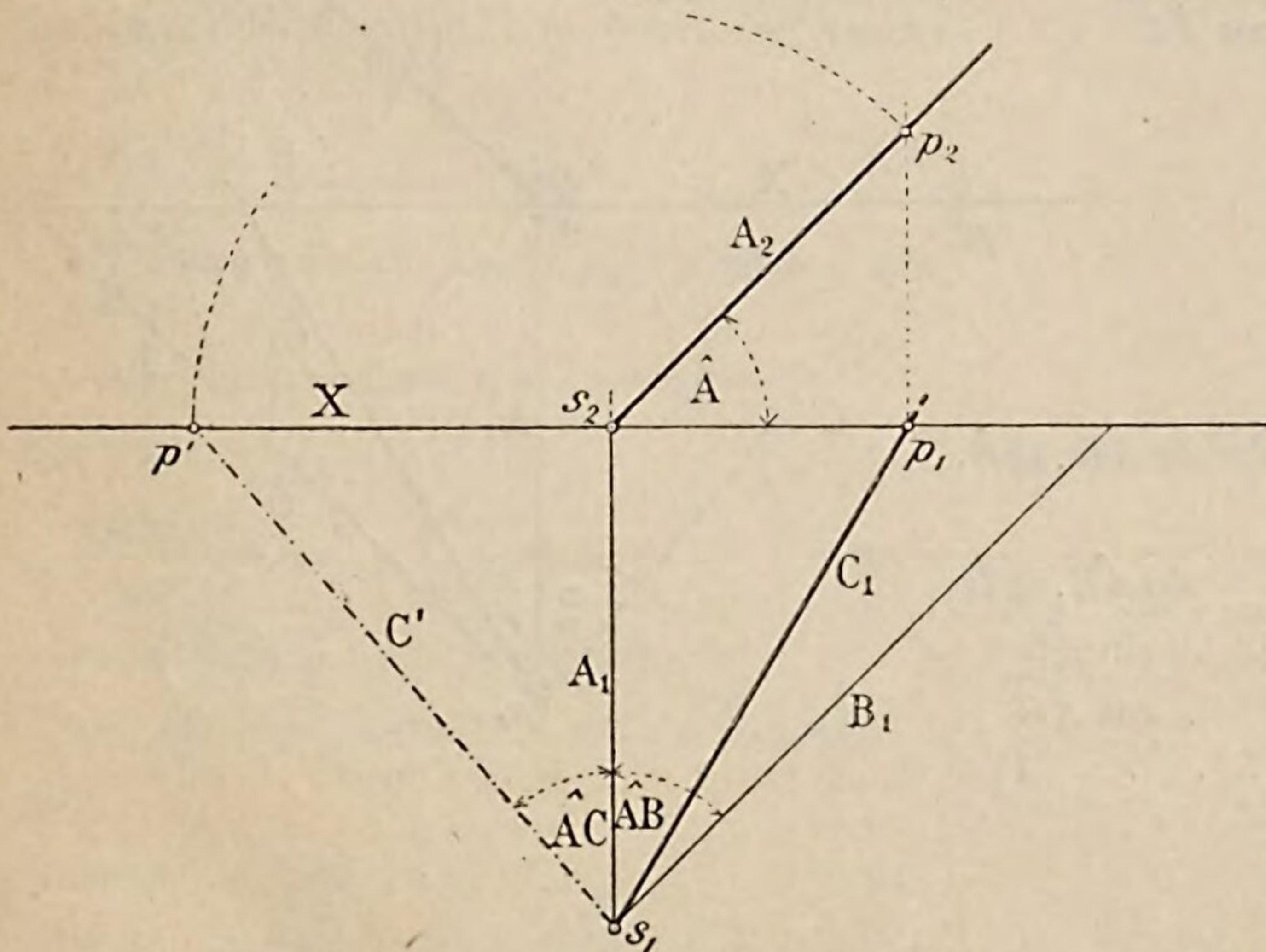
die Projektionen eines beliebigen Punktes p der Kante C durch Annahme der Punkte p' und p'' auf C' und C'' gleichweit abstehend von s_1 . Aus p' und p'' bestimmt sich p_1 ; aus p_1 und p' bzw. p_1 und p'' ergibt sich p_2 durch Umkehrung des in der Antwort auf Frage 3 angegebenen Verfahrens.

Genügen die drei Seitenwinkel hinsichtlich ihrer Grösse der in der Antw. der Frage 2 genannten Bedingung, so ist die Aufgabe stets lösbar und es giebt zwei zur Ebene AB bzw. zur **Pr. Eb.** E_1 symmetrisch liegende Dreikante.

Aufgabe 2 u. 3. Zweiter und dritter Dreikantsfall. Es sind gegeben zwei Seitenwinkel $\hat{AB}$ und $\hat{AC}$ sowie

- dereingeschlossene Flächenwinkel $\hat{A}$, oder
- der dem Seitenwinkel $\hat{AC}$ gegenüberliegende Flächenwinkel $\hat{B}$.

Figur 5.



Fall a. Auflösung und Konstruktion.

Man lege, siehe Figur 5, die beiden gegebenen Seitenwinkel $\hat{AB}$ und $\hat{AC}$ mit gemeinsamem Winkelschenkel A_1 in die **Pr. Eb.** E_1 und wähle die **Pr. Eb.** E_2 , wie im vorhergehenden Fall, so kann man unmittelbar im Punkte s_2 an die X -Achse den Winkel $\hat{A}$ antragen und erhält in dessen zweitem Winkelschenkel die zweite Projektion C_2 von C . Mittels p' bestimmt sich p_2 ($\overline{s_2 p'} = \overline{s_2 p_2}$) und hieraus p_1 .

Es sind stets zwei zur Ebene AB (**Pr. Eb.** E_1) symmetrisch liegende Dreikante vorhanden.

oder in Rücksicht auf Gleichung 1):

$$\frac{\sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} = \cos^2 \hat{A}B \cdot \operatorname{tg}^2 \hat{B}$$

woraus folgt, dass

$$\sin^2 \varphi = \cos^2 \hat{A}B \cdot \operatorname{tg}^2 \hat{B} - \sin^2 \varphi \cdot (\cos^2 \hat{A}B + \operatorname{tg}^2 \hat{B})$$

oder

$$\sin^2 \varphi = \frac{\cos^2 \hat{A}B \cdot \operatorname{tg}^2 \hat{B}}{1 + \cos^2 \hat{A}B \cdot \operatorname{tg}^2 \hat{B}} \text{ ist . . . 2)}$$

Aus der Figur ist weiter ersichtlich, dass

$$\overline{s_2 \eta} = \overline{s_2 q} \cdot \sin \varphi = \operatorname{tg} \hat{A}B \cdot \sin \varphi$$

ist, daher erhält man mit Bezugnahme auf Gleichung 2):

$$\begin{aligned} 3) \quad \overline{s_2 \eta}^2 &= \frac{\operatorname{tg}^2 \hat{A}B \cdot \cos^2 \hat{A}B \cdot \operatorname{tg}^2 \hat{B}}{1 + \cos^2 \hat{A}B \cdot \operatorname{tg}^2 \hat{B}} \\ &= \frac{\sin^2 \hat{A}B}{\cos^2 \hat{A}B} \cdot \frac{\cos^2 \hat{A}B \cdot \operatorname{tg}^2 \hat{B}}{1 + \cos^2 \hat{A}B \cdot \operatorname{tg}^2 \hat{B}} \\ &= \frac{\sin^2 \hat{A}B \cdot \operatorname{tg}^2 \hat{B}}{1 + \cos^2 \hat{A}B \cdot \operatorname{tg}^2 \hat{B}} \end{aligned}$$

Mit Bezugnahme auf die Gleichungen 11 u. 14, siehe Erkl. 110, I. Teil, verwandelt sich Gleichung 3) in folgende:

$$\begin{aligned} \overline{s_2 \eta}^2 &= \frac{\sin^2 \hat{A}B \cdot \frac{\sin^2 \hat{B}}{1 - \sin^2 \hat{B}}}{1 + (1 - \sin^2 \hat{A}B) \cdot \frac{\sin^2 \hat{B}}{1 - \sin^2 \hat{B}}} = \frac{\sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{B}}{1 - \sin^2 \hat{B} + (1 - \sin^2 \hat{A}B) \cdot \sin^2 \hat{B}} \\ \overline{s_2 \eta}^2 &= \frac{\sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{B}}{1 - \sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{B}} \quad . . . \quad 4) \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Zähler der rechten Seite für einen Augenblick mit m^2 , so heisst der Nenner $1 - m^2$ und man hat:

$$\overline{s_2 \eta}^2 = \frac{m^2}{1 - m^2} \quad . . . \quad 5)$$

Soll nun gerade ein Punkt p_2 vorhanden sein, so muss:

$$\overline{s_2 p'} = \overline{s_2 \eta} \text{ oder: } \overline{s_2 p'}^2 = \overline{s_2 \eta}^2$$

oder auch:

$$\frac{\sin^2 \hat{A}C}{1 - \sin^2 \hat{A}C} = \frac{m^2}{1 - m^2} \text{ sein 6)}$$

Aus Gleichung 6) folgt die weitere:

$$\sin^2 \hat{A}C - m^2 \cdot \sin^2 \hat{A}C = m^2 - m^2 \cdot \sin^2 \hat{A}C$$

oder:

$$\sin^2 \hat{A}C = m^2 \quad . . . \quad 7)$$

Führt man für m^2 seinen Wert aus Gleichung 5) ein, so erhält man:

$$\sin^2 \hat{A}C = \sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{B}$$

$$1 + \frac{\sin^2 \hat{A}B}{1 - \sin^2 \hat{A}B} \cdot (1 - \sin^2 \hat{A}) = \frac{\sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{A} \cdot (1 - \sin^2 \hat{C})}{\sin^2 \hat{C}}$$

$$(1 + \sin^2 \hat{A}B - \sin^2 \hat{A}B - \sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{A}) \cdot \sin^2 \hat{C} = \sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{A} - \sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{A} \cdot \sin^2 \hat{C}$$

oder:

$$\sin^2 \hat{C} - \sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{A} \cdot \sin^2 \hat{C} = \sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{A} - \sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{A} \cdot \sin^2 \hat{C},$$

woraus folgt:

$$\sin^2 \hat{C} = \sin^2 \hat{A}B \cdot \sin^2 \hat{A}$$

$$\text{oder: } \sin \hat{C} = \sin \hat{A}B \cdot \sin \hat{A} \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

Ist daher:

$$\sin \hat{C} > \sin \hat{A}B \cdot \sin \hat{A},$$

so sind zwei Dreikante vorhanden.

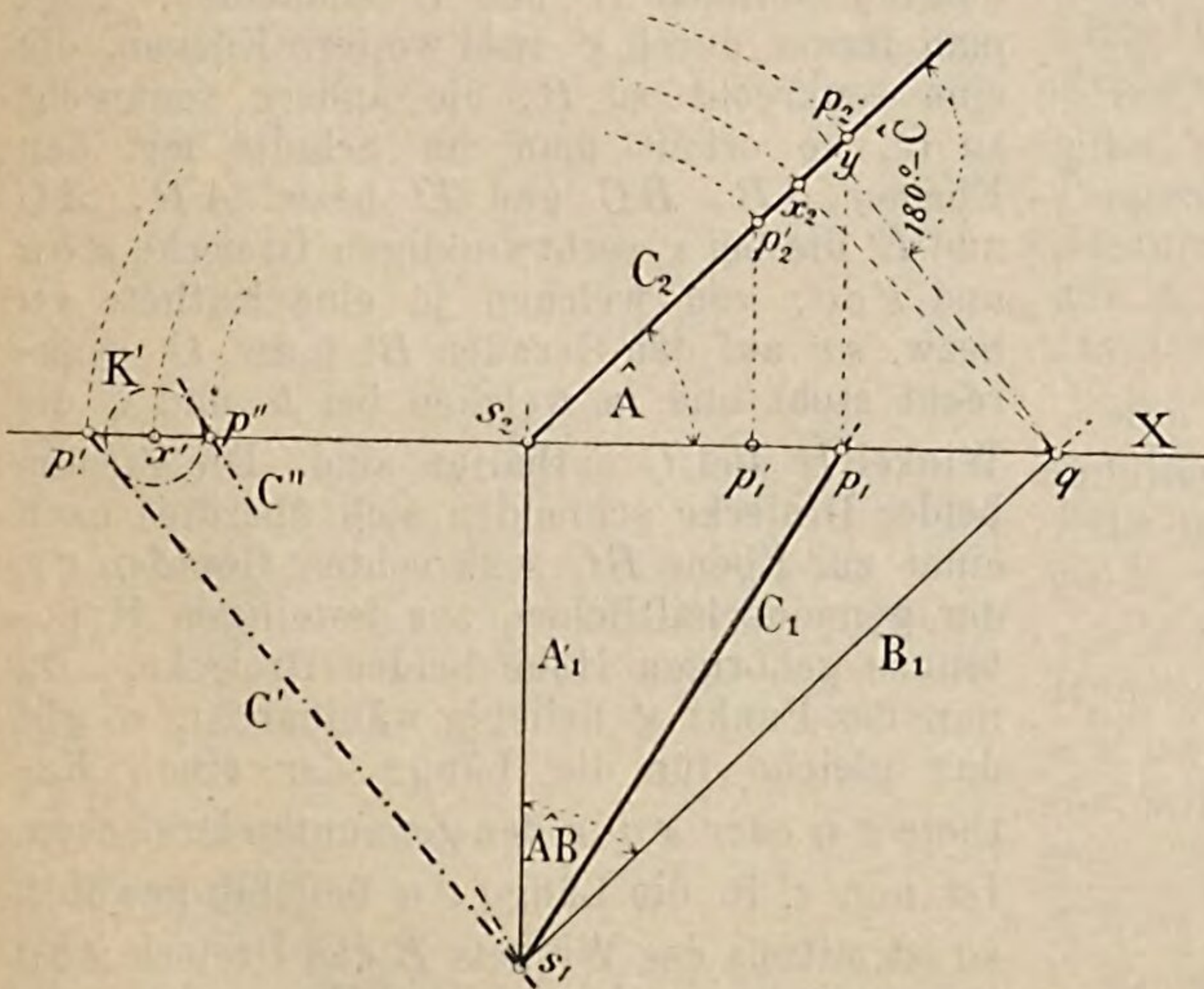
Erkl. 14. In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Verhältnis der einem Winkel anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden die trigonometrische Cotangente, siehe Erkl. 15, (in Zeichen: ctg . lies: cotangens) dieses Winkels.

Zwischen der trigonometrischen Tangente und Cotangente eines Winkels findet stets die Beziehung statt, dass der Wert der einen gleich ist dem reciproken Wert der anderen, siehe Erkl. 16. Heisst demnach ein Winkel: $\hat{C}$, so ist stets:

$$\text{tg } \hat{C} = \frac{1}{\text{ctg } \hat{C}} \quad \text{oder: } \text{ctg } \hat{C} = \frac{1}{\text{tg } \hat{C}}$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der ebenen Trigonometrie und Goniometrie.)

Figur 8.



Erkl. 15. Das Wort: cotangens ist die Abkürzung von complementi tangens und bedeutet die Tangente für den Complementswinkel.

Fall b. Auflösung. Legt man den gegebenen Seitenwinkel $\hat{A}B$ wie bisher in die **Pr. Eb. E_1** , so erhält man wieder mittels des Flächenwinkels $\hat{A}$ die zweite Spur C_2 der Ebene AC bzw. die zweite Projektion der Kante C und man hat nur durch die Gerade B eine Ebene unter dem Winkel $\hat{C}$ gegen die Ebene AC geneigt zu legen, um in deren Schnitt mit Ebene AC die Kante C zu erhalten. Zu diesem Zwecke erhält man folgende

Konstruktion. Fülle, siehe Figur 8, von q die Senkrechte qx_2 zu C_2 und nehme diese Linie als Achse eines senkrechten Kreiskegels, dessen Mantellinien mit Ebene AC den gegebenen Flächenwinkel $\hat{C}$ einschliessen, so trifft dieser Kegel die Ebene AC nach einem Kreise mit dem Mittelpunkt x und einem Halbmesser gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der einen Kathete qx_2 und dem derselben gegenüberliegenden Winkel $\hat{C}$ oder $180^\circ - \hat{C}$, je nachdem der gegebene Winkel $\hat{C}$ spitz oder stumpf sein soll. Erstes sei vorausgesetzt.

Durch Umlegung der Ebene AC in die **Pr. Eb. E_1** gelangt der Punkt x nach x' und der eben genannte Kreis fällt zusammen mit dem um x' mit dem Halbmesser x_2y beschriebenen Kreise K' . Die von s_1 aus an K' gezogenen Tangenten bezeichnen die umgelegten Schnittlinien der Ebene AC mit den durch B gehenden, unter dem Winkel $\hat{C}$ zu AC geneigten Ebenen.

Im vorliegenden Fall ist, da Winkel $\hat{C}$ der Voraussetzung nach spitz sein soll, nur die nicht zwischen den Linien s_1x' und s_1s_2

Erkl. 16. Das Wort „reciprok“ stammt aus dem Lateinischen (reciprocus) und heisst wechselseitig oder wechselseitig.

liegende Tangente als Umlegung von C aufzufassen; sie schneidet X in p' , dem auf C_2 der Punkt p_2 , auf X der Punkt p_1 entspricht.

Es gibt somit nur ein Dreikant mit dem spitzen Winkel C .

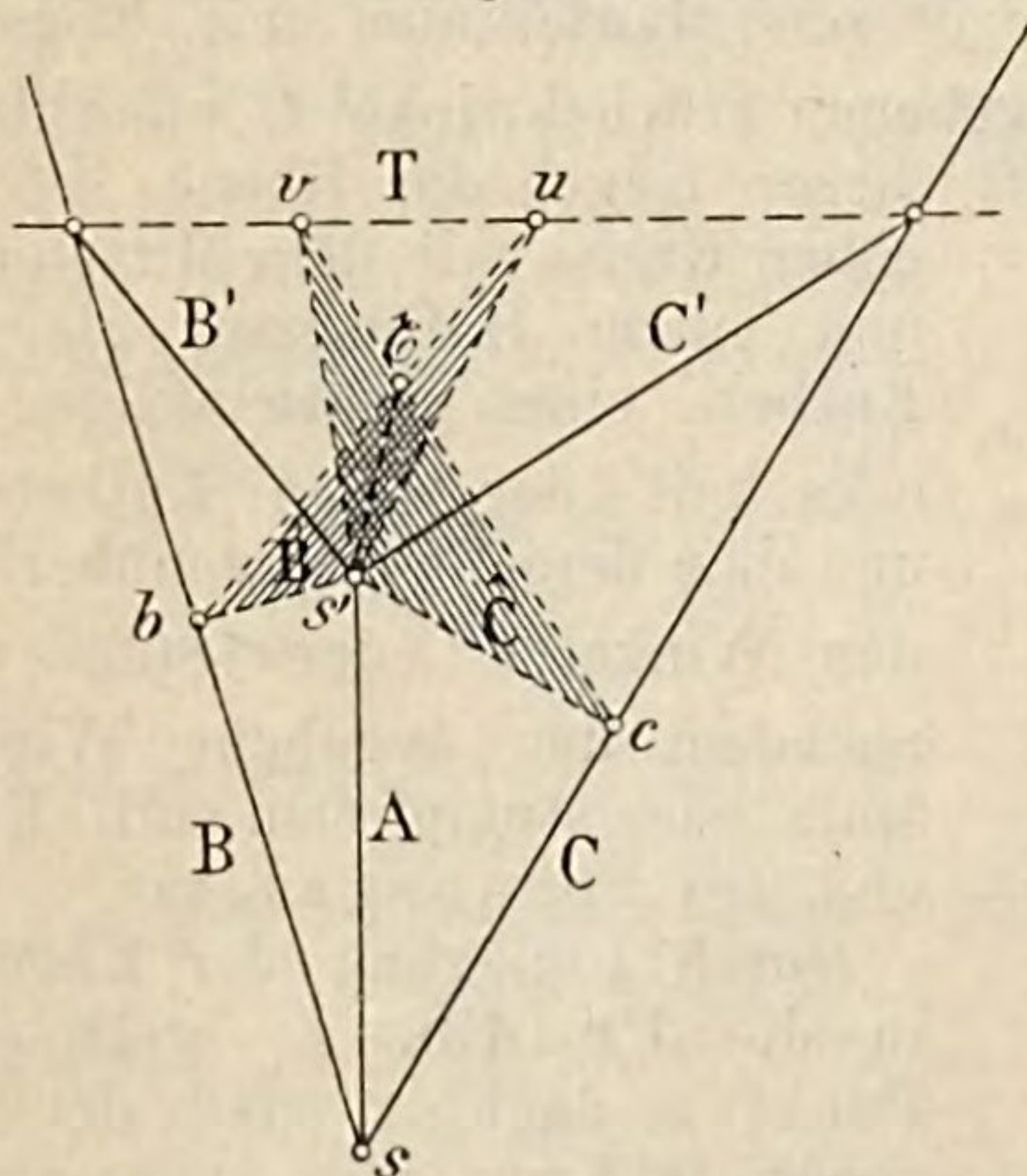
Hätte man die zweite Tangente C'' an K' als Umlegung der Kante C aufgefasst, so entspräche derselben ein zweites Dreikant mit dem Flächenwinkel $180^\circ - \hat{C}$. Soll das Dreikant den spitzen Winkel $\hat{A}$ besitzen, so muss der Punkt p auf dem positiven Teile von C liegen, was stets der Fall ist, wenn C' sich zwischen den Linien $s_1 x'$ und A_1 befindet, d. h. wenn K' die Linie A_1 nicht schneidet.

Würde dagegen der Kreis K' die Kante A_1 schneiden, so entspräche der zwischen die Kanten A_1 und B_1 fallenden Tangente C' ein Dreikant mit dem Winkel $180^\circ - \hat{A}$. Ausser den genannten Dreikanten existieren selbstverständlich noch die zu AB symmetrischen liegenden Dreikante.

Man löse die Aufgabe für den Fall der nicht gegebene Seitenwinkel AC mit der **Pr. Eb.** E_1 zusammenfallen und die Kante A zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht stehen soll.

Aufgabe 6. Sechster Dreikantsfall. Es sind gegeben die drei Flächenwinkel $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$.

Figur 9.



Auflösung. Ist, siehe Figur 9, $s(ABC)$ das gesuchte Dreikant, so denke man sich durch einen beliebig auf A gewählten Punkt s' eine zur Kante A senkrechte Ebene E' gewählt, welche die Ebenen AB und AC nach den unter dem Winkel A zu einander geneigten Geraden B' und C' schneidet. Legt man ferner durch s' zwei weitere Ebenen, die eine senkrecht zu B , die andere senkrecht zu C , so erhält man im Schnitt mit den Ebenen AB , BC und E' bzw. AB , AC und E' die bei s' rechtwinkligen Dreiecke $s'bu$ und $s'cv$, von welchen je eine Kathete su bzw. sv auf den Geraden B' bzw. C' senkrecht steht und in welchen bei b und c die Winkel $\hat{B}$ und $\hat{C}$ enthalten sind. Die Ebenen beider Dreiecke schneiden sich überdies nach einer zur Ebene BC senkrechten Geraden $s'r$, der gemeinschaftlichen, zur jeweiligen Hypotenuse gehörigen Höhe beider Dreiecke. Da nun der Punkt s' beliebig wählbar ist, so gilt das gleiche für die Länge der einen Kathete $s'u$ oder sv in den genannten Dreiecken. Ist nun z. B. die Länge $s'u$ beliebig gewählt, so ist mittels des Winkels $\hat{B}$ das Dreieck $s'bu$ konstruierbar und seine zur Hypotenuse gehörige Höhe $s'r$ giebt zugleich die Länge der zur Hypotenuse gehörigen Höhe im anderen Dreieck $s'cv$, womit auch dieses mit Zuhilfenahme

nahme des Winkels $\hat{C}$ bestimmt ist. Beide Dreiecke liegen ferner mit je einer Kathete in der Ebene E' , ihre Ecken u und v' bestimmen somit die Schnittlinie T der Ebene BC mit E' .

Man erhält folgende

Konstruktion. Wähle, siehe Figur 10, als Ebene E' die **Pr. Eb.** E_2 , so erhält man mittels des Winkels $\hat{A}$ unmittelbar die zweiten Projektionen B_2 und C_2 der Kanten B und C . Nimmt man nun auf der durch s_2 senkrecht zu B_2 gezogenen Geraden den Punkt u beliebig an, zieht durch u unter dem Winkel $\hat{B}$

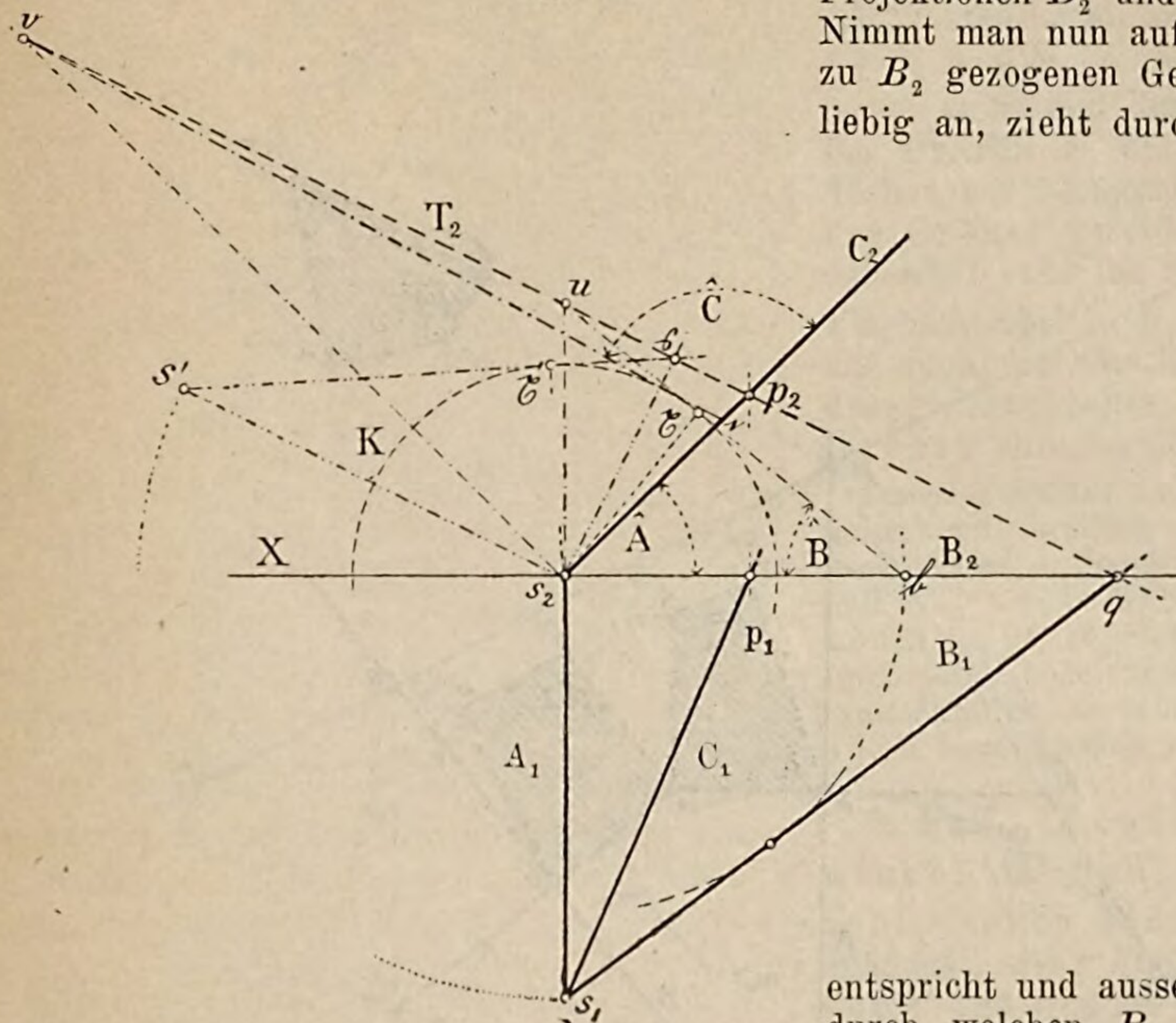
zur X -Achse geneigt die Gerade ub , ermittelt in dem rechtwinkligen Dreieck s_2ub die zur Hypotenuse ub gehörige Höhe s_2r , so kann man das zweite rechtwinklige Dreieck vs_2c , bei welchem die eine Kathete auf die Linie C_2 fällt, mittels des Winkels $s_2cv = 180^\circ - \hat{C}$ und der zur Hypotenuse cv gehörigen Höhe $= s_2r$ gleichfalls konstruieren und erhält hiedurch den Punkt v . uv , d. i. T_2 , liefert auf C_2 den Punkt p_2 , dem auf X der Punkt p ,

entspricht und ausserdem den Punkt q auf X , durch welchen B_1 hindurchgeht. Letztere Linie lässt sich auf mehrfache Weise konstruieren: Beschreibt man nämlich um s_2 mit s_2b als Halbmesser einen Kreis, so ist B_1 Tangente an diesen Kreis und geht durch q . Hiedurch ergibt sich aber im Schnitt von B_1 und A_1 der Punkt s_1 , womit die Projektionen des Dreikants bestimmt sind.

Man könnte den Punkt s_1 aber auch mit Zuhilfenahme der Länge s_2r konstruieren. Fällt man nämlich von s_2 die Senkrechte s_2s zu T_2 und konstruiert das rechtwinklige Dreieck s_2ss' mit s_2s als Kathete und der zur Hypotenuse gehörigen Höhe gleich der Strecke $s_2r' = s_2r$ (ss' die Tangente an K), so gibt die Strecke s_2s' den Abstand des Punktes s von der **Pr. Eb.** E_2 an, d. h. es ist $s_2s_1 = s_2s'$ zu machen.

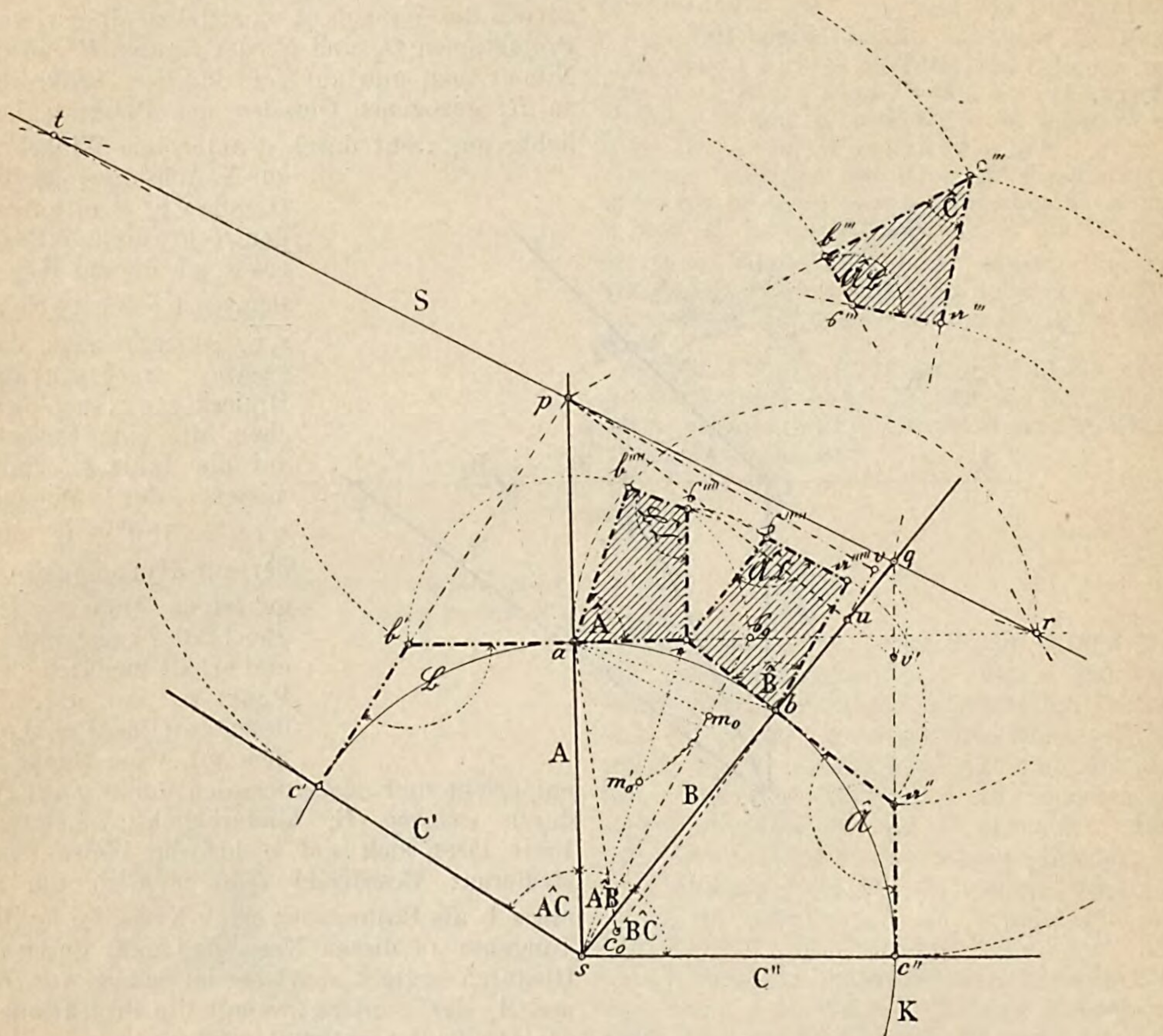
Es gibt stets zwei zur Ebene AB (**Pr. Eb.** E_1) symmetrische Dreikante, sobald die drei gegebenen Winkel $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ die in der Antw. der Frage 2 genannte Bedingung hinsichtlich ihrer Summengrösse erfüllen.

Figur 10.



Anmerkung 1. Die im vorhergehenden gelösten sechs Fundamentalaufgaben über das Dreikant lassen sich, falls es sich nur um die Ermittlung der nicht gegebenen Bestimmungsstücke in wahrer Grösse handelt, auch ohne Benützung der Projektionen des Dreikants dadurch herstellen, dass man die Begrenzungen des von den Dreikanten $s(ABC)$ und $s(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ eingeschlossenen Körpers, siehe Figur 2, in wahrer Grösse zeichnet.

Figur 11.



1. Fall. Es seien zunächst die drei Seitenwinkel gegeben. Man lege die drei Seitenwinkel mit den gemeinsamen Winkelschenkeln A und B in die **Pr. Eb. E_1** , siehe Figur 11, und zeichne um s mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis K , welcher auf den Kanten A , B , C' und C'' die Punkte a , b , c' und c'' ausschneidet, vergl. auch Figur 2, wodurch mittels der Tangenten in den eben genannten Punkten die Vierecke $sa'b'c'$, $sacb$ und $sb'a''c''$ bestimmt sind. Die Verbindungslinien $c'b'$ und $c''a''$ treffen die Kanten A und B in den Punkten p und q der Spur S der Vierecksebene $sacb$, siehe auch Figur 2. Denkt man sich nun diese Ebene um S in die **Pr. Eb. E_1** umgelegt

und das Viereck $\mathfrak{s}acb$ gezeichnet, so kommt dieses nach $\mathfrak{s}'''a'''c'''b'''$ so, dass $\overline{pc'''} = \overline{pc'}$, $\overline{qc'''} = \overline{qc''}$ ist und ausserdem $\mathfrak{s}'''a'''$, ebenso $\mathfrak{s}'''b'''$ senkrecht zu qc''' bzw. pc''' steht und durch den Schnittpunkt t von bc bzw. r von ac mit S hindurchgeht.

Zeichnet man ferner die Vierecke $ac\mathfrak{s}'''b'''$ und $bc\mathfrak{s}''''a''''$ unter Berücksichtigung, dass $\overline{ab''''} = \overline{ab'}$ ist und $b''''\mathfrak{s}''''$ senkrecht zu ab'''' steht und durch r geht, desgleichen $\overline{ba''''} = \overline{ba''}$ ist und $\mathfrak{s}''''a''''$ senkrecht zu ba'''' steht und durch t geht, so hat man in der **Pr. Eb.** E_1 die sämtlichen Begrenzungsflächen des obengenannten Körpers in wahrer Grösse gezeichnet und man kann aus denselben, wie die Figur 11 zeigt, sowohl die Flächenwinkel $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ des Dreikants $s(ABC)$, als auch die sämtlichen Bestimmungsstücke des Polardreikants $\mathfrak{s}(\mathfrak{ABC})$ in wahrer Grösse entnehmen.

Durchschneidet man die Papierfläche von s ausgehend nach der Linie sc' , $b'a$, b'''' ... bis zurück nach s , desgleichen nach den Linien pc''' und qc''' und dreht die Vierecke um die Linien sa , ac , cb , bs und S bis die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Punkte im Raume zusammenfallen, so erhält man ein Modell des oben bezeichneten Körpers.

2. Fall. Kennt man zwei Seitenwinkel $\hat{AB}$ und $\hat{AC}$ sowie den eingeschlossenen Flächenwinkel $\hat{A}$, so sind zunächst, siehe Figur 11, die Vierecke $sacb$, $sa'b'c'$ und $ac\mathfrak{s}'''b'''$ gegeben.

Aus letzterem Viereck gewinnt man die Strecke $a\mathfrak{s}'''$, welche im Verein mit der Strecke sa das rechtwinklige Dreieck $sa\mathfrak{s}_0$ bestimmt, dessen zur Hypotenuse gehörige Höhe am_0 dem Halbmesser am des dem Dreieck abc , siehe Figur 2, umschriebenen Kreises gleich ist. Da man ausserdem von letzterem Dreieck noch die Längen $\overline{ab}$ und $\overline{ac'}$ der Seiten $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ kennt, so lässt sich ein dem Dreieck abc kongruentes Dreieck abc_0 zeichnen [es liegt m'_0 auf sc , so dass $\overline{am'_0} = \overline{am_0} = \overline{m'_0c_0}$ ist], wodurch man die Länge $\overline{bc_0}$ der dritten Seite $\overline{bc}$ und hiedurch den Punkt c'' ($\overline{bc''} = \overline{bc_0}$, $\overline{sc''} = \overline{sc'}$) erhält. Das Weitere erledigt sich wie im ersten Fall.

3. Fall. Ist statt des eingeschlossenen Winkels $\hat{A}$ der gegenüberliegende Winkel $\hat{B}$ gegeben, so erhält man auch in diesem Fall sehr einfach die Figur 11, wenn man sich durch den Punkt p eine Ebene parallel zur Vierecksebene $cba\mathfrak{s}$ gelegt denkt, denn diese

schneidet die drei Ebenen AB , AC sowie die Vierecksebene $abc\hat{s}$ nach den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Umlegung mit dem Dreieck puv zusammenfällt, das bei u den Winkel $\hat{B}$ enthält.

Man erhält folgende

Konstruktion. Mittels der Seitenwinkel $\hat{AB}$ und $\hat{AC}$ sind die beiden Vierecke $sacb$ und $sa\hat{b}'c'$ und dadurch zugleich der Punkt p bestimmt. Zeichnet man nun pu senkrecht zu B und über pu das rechtwinklige Dreieck puv mit dem Winkel $\hat{B}$ bei u , macht $uv' = uv$, so erhält man die Linie qc'' als Tangente durch v' an den um s mit einem Halbmesser gleich sc'' beschriebenen Kreis K . Hiedurch ist das Viereck $sba''c''$ bestimmbar, und das Weitere vollzieht sich wie im Fall 1.

4. u. 5. Fall. Kennt man einen Seitenwinkel $\hat{AB}$, sowie entweder die beiden Flächenwinkel $\hat{A}$ und $\hat{B}$ oder $\hat{A}$ und $\hat{C}$, so sind diese Fälle gleichbedeutend mit den Fällen 2 und 3, denn man besitzt von dem Polardreikant $\hat{s}(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ entweder die Winkel $\hat{\mathcal{C}}$, $\mathcal{B}\hat{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{A}\hat{\mathcal{C}}$, daher Fall 2, oder die Winkel $\hat{\mathcal{C}}$, $\mathcal{B}\hat{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{A}\hat{\mathcal{B}}$, daher Fall 3.

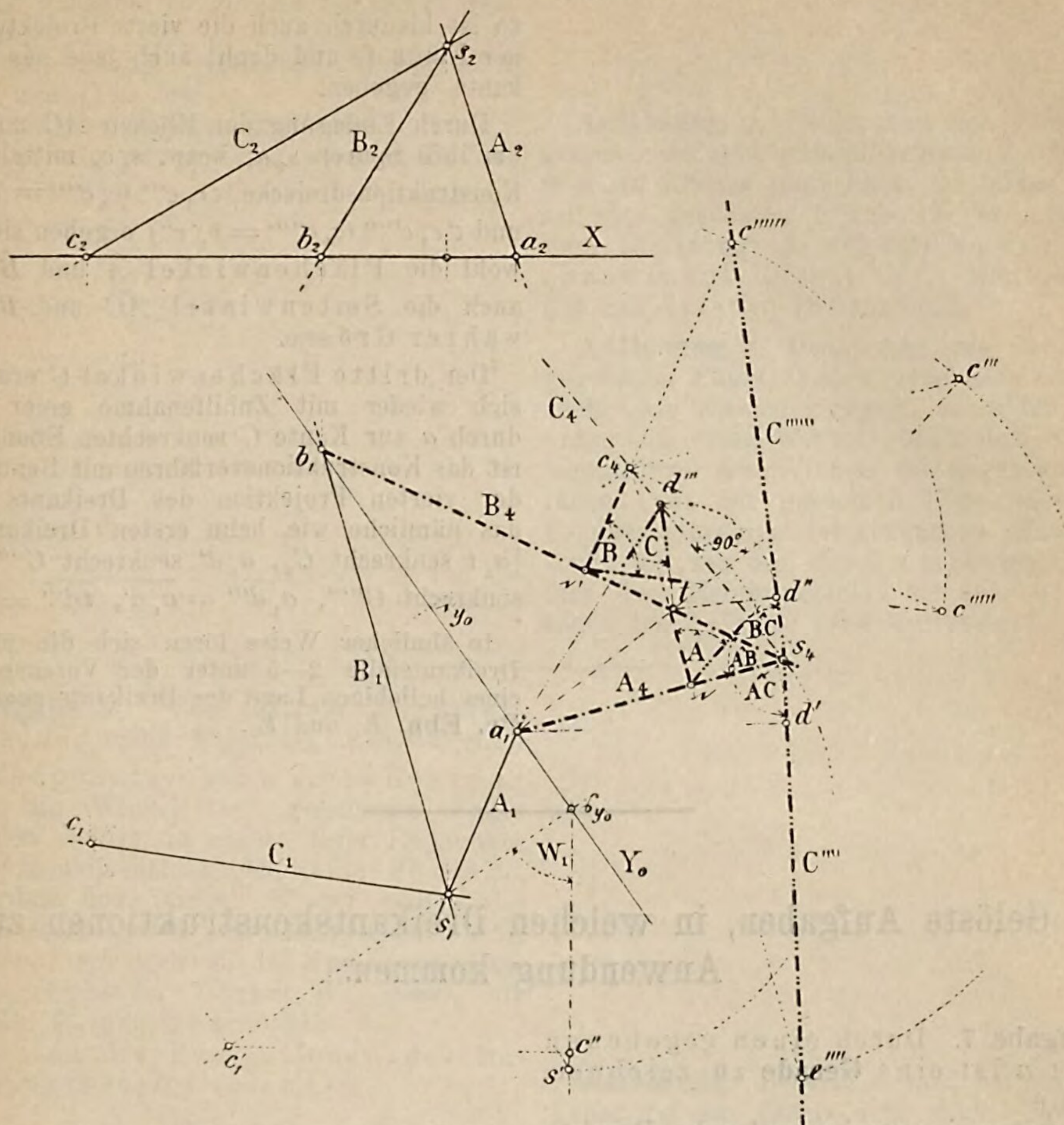
6. Fall. Der Fall 6 ist gleichbedeutend mit dem Fall 1, da von dem Polardreikant $\hat{s}(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ die drei Seitenwinkel $\mathcal{A}\hat{\mathcal{B}}$, $\mathcal{A}\hat{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{B}\hat{\mathcal{C}}$ bekannt sind. Man hat somit bei dieser Art der Dreikantsbehandlung nur drei verschiedene Fundamentalkonstruktionen durchzuführen.

C) Ueber die Ermittlung der wahren Grössen der Seiten- und Flächenwinkel eines Dreikants in allgemeiner Lage gegen die Pr. Ebn. E_1 und E_2 .

Frage 4. Wie ermittelt man in der Projektionszeichnung die wahren Grössen der sechs Bestimmungsstücke eines Dreikants, wenn dasselbe eine ganz beliebige Lage gegen die Pr. Ebn. E_1 und E_2 einnimmt?

Antwort. Hat das Dreikant eine ganz beliebige Lage gegen die Pr. Ebn. E_1 und E_2 , so werden seine Projektionen durch die Projektionen von dreien beliebigen, durch denselben Punkt s geführten Geraden A , B , C , siehe Figur 12, dargestellt sein.

Figur 12.



Zum Zwecke der Ermittlung der wahren Grössen seiner Seiten- und Flächenwinkel wähle man eine **Pr. Eb. E_1** , zusammenfallend mit einer der Seitenflächen des Dreikants, etwa mit AB , bestimme dessen vierte Projektion und lege die **Pr. Eb. E_4** in die **Pr. Eb. E_1** um. Nunmehr hat das Dreikant die Lage gegen die **Pr. Eb. E_4** , wie in den Fundamentalaufgaben 1–6, und man kann das im ersten Dreikantsfall angewendete Konstruktionsverfahren durchführen. Man erhält folgende

Konstruktion. Zeichne die X -Achse so, dass die zweiten Projektionen der Kanten A, B, C in den Punkten a_2, b_2, c_2 geschnitten werden, bestimme die erste Spur der Ebene AB , nehme dieselbe als neue Projektionsachse Y_0 und lege die Ebene AB in die **Pr. Eb. E_1** um, wodurch man s_1 sowie die Geraden A_1 und B_1 erhält. Bestimmt man nun die vierte

Projektion c_4 des Punktes c [$\overline{s_{y_0} c''} = \overline{c_{y_0} c_4}$], so ist hiedurch auch die vierte Projektion C_4 der Kante C und damit auch jene des Dreikants gegeben.

Durch Umlegung der Ebenen AC und BC um ihre Spuren $s_1 a_1$ bzw. $s_1 c_1$ mittels der Konstruktionsdreiecke $c c_4 c'''$ ($c_4 c''' = c_1' c''$) und $c' c_4 c''''$ ($c_4 c'''' = c_1' c''$) ergeben sich sowohl die Flächenwinkel $\hat{A}$ und $\hat{B}$, wie auch die Seitenwinkel $\hat{AC}$ und $\hat{BC}$ in wahrer Grösse.

Der dritte Flächenwinkel $\hat{C}$ ermittelt sich wieder mit Zuhilfenahme einer etwa durch a zur Kante C senkrechten Ebene und ist das Konstruktionsverfahren mit Benützung der vierten Projektion des Dreikants ganz das nämliche wie beim ersten Dreikantsfall [$a_1 t$ senkrecht C_4 , $a_1 d'$ senkrecht C'''' , $t d''$ senkrecht C'''' , $\overline{a_1 d''} = \overline{a_1 d'}$, $\overline{t d''} = \overline{t d'}$].

In ähnlicher Weise lösen sich die übrigen Dreikantsfälle 2—5 unter der Voraussetzung einer beliebigen Lage des Dreikants gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 .

D) Gelöste Aufgaben, in welchen Dreikantskonstruktionen zur Anwendung kommen.

Aufgabe 7. Durch einen gegebenen Punkt a ist eine **Gerade** zu zeichnen, welche

- a) mit zweien gegebenen Geraden B und C ,
oder
- b) mit zweien gegebenen Ebenen ST
und UV

Winkel von vorgeschriebener Grösse einschliesst.

Auflösung a. Denkt man sich durch den gegebenen Punkt a Parallele B' und C' zu B und C gezogen, so bilden diese mit der gesuchten Geraden R ein Dreikant, von welchem die drei Seitenwinkel gegeben sind. Man hat somit den ersten Dreikantsfall und löst denselben mit Bezugnahme auf Frage und Antwort 3.

Auflösung b. Denkt man sich durch den gegebenen Punkt Senkrechte M und N auf die gegebenen Ebenen gefällt, so bilden M und N im Verein mit der gesuchten Geraden R ein Dreikant, von welchem die drei Seitenwinkel bekannt sind. Man hat somit den ersten Dreikantsfall.

Aufgabe 8. Durch einen gegebenen Punkt a ist eine Ebene zu zeichnen, welche

- mit zwei gegebenen Ebenen ST und UV , oder
- mit zwei gegebenen Geraden B und C Winkel von vorgeschriebener Grösse einschliesst.

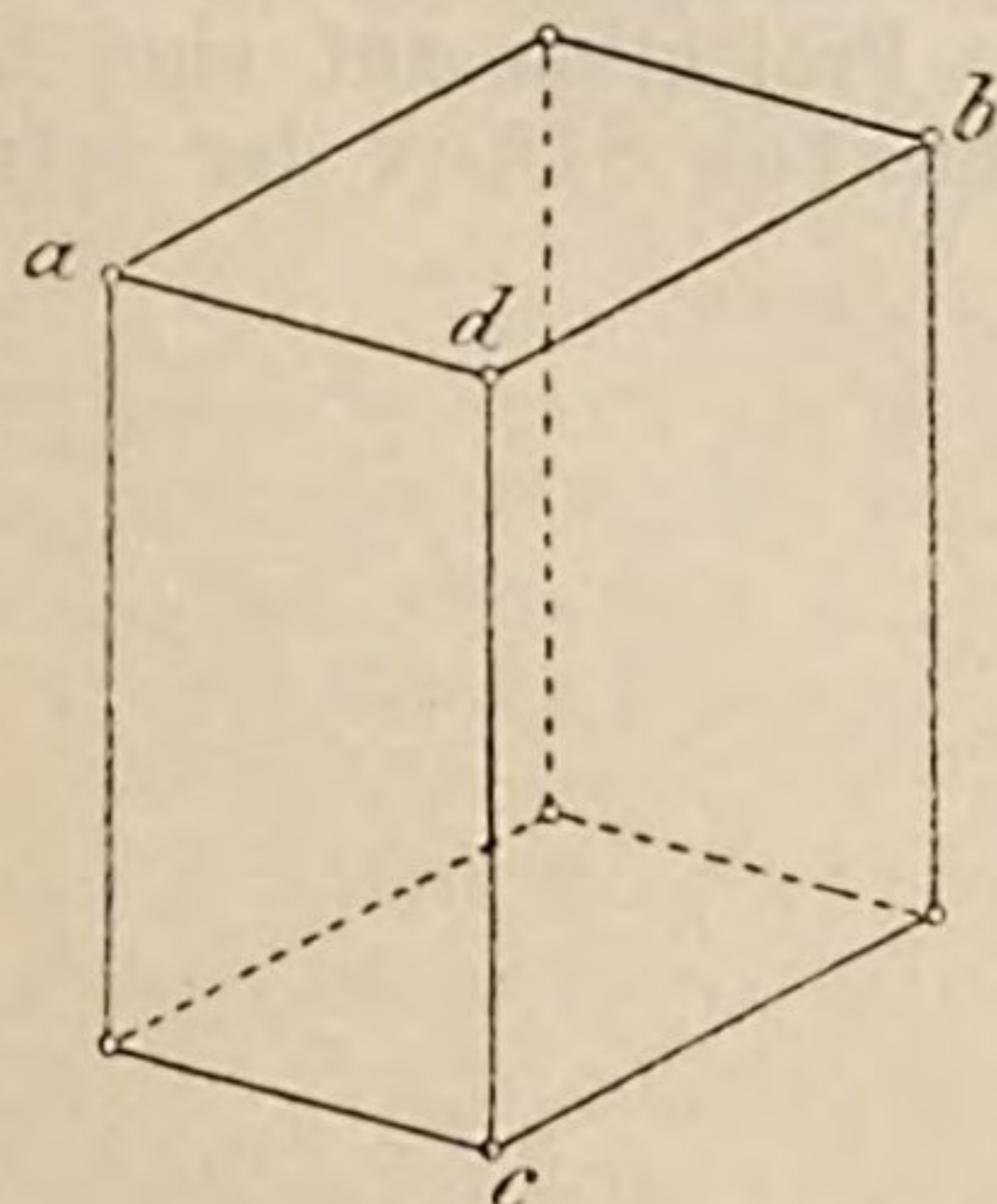
Auflösung a. Denkt man sich durch den gegebenen Punkt a Parallelebenen zu den gegebenen Ebenen gezeichnet, so bilden diese mit der gesuchten Ebene die Seitenflächen eines Dreikants, von welchem die drei Flächenwinkel bekannt sind. Man hat somit den dritten Dreikantsfall.

Auflösung b. Denkt man sich durch den gegebenen Punkt zu den gegebenen Geraden senkrechte Ebenen gezogen, so bilden diese unter sich einen Winkel gleich dem Supplementwinkel des Winkels der gegebenen Geraden, mit der gesuchten Ebene aber die Complementwinkel der gegebenen. Man kennt somit von den drei durch a gehenden Ebenen ihre drei Neigungswinkel zu einander, hat somit den dritten Dreikantsfall.

Aufgabe 9. Von einem Parallelepipedon, siehe Figur 13, kennt man die Endpunkte a und d einer Kante ad sowie die Winkel der gegebenen Kante mit den beiden in einem ihrer Endpunkte etwa d zusammenstossenden Kanten db und dc , ausserdem den Winkel W der beiden die Kante enthaltenden Begrenzungsebenen dab und $dc b$, von welchen die eine, etwa dab , unter gegebenem Winkel W_2 gegen die **Pr. Eb.** E_2 geneigt sein soll.

Es sind die Projektionen des Parallelepipedons zu zeichnen.

Figur 13.



Auflösung. Legt man zunächst durch die Kante da eine Ebene adb unter dem Winkel W_2 gegen die **Pr. Eb.** E_2 geneigt, so hat man die Aufgabe zurückgeführt auf den zweiten Dreikantsfall, da man ja von dem Dreikant $d(abc)$ die zwei Seitenwinkel adb und $cd b$ sowie den eingeschlossenen Flächenwinkel W kennt. Man führe die Konstruktion unter Benützung der Ebene adb als **Pr. Eb.** E_1 analog wie in Antwort der Frage 3 durch.

Aufgabe 10. Von einem Parallelepipedon sind die Endpunkte a, b, c von dreien in einer Ecke d zusammenstossenden Kanten gegeben. Man kennt ausserdem

- den Winkel w' der Kante cd mit der Diagonalebene cab , sowie den Winkel W''

Auflösung a bis d. In allen vier Fällen werden die Projektionen des Parallelepipedons

- der die Kante cd enthaltenden Parallelepipeden; b) die Neigung der beiden durch ac und bc gehenden Parallelepipeden gegen die Diagonalebene abc . c) die Neigung der Ebene adc mit der Diagonalebene abc , sowie den Winkel der beiden Ebenen adc und bdc , endlich d) die Neigung der drei in d zusammenstossenden Parallelepipeden unter sich.

Es sind die Projektionen des Parallelepipeds zu zeichnen.

Anmerkung 2. Weitere Aufgaben, in welchen Dreikantskonstruktionen zur Anwendung kommen, folgen später.

2) Ueber die rechtwinklige Projektion von Körpern.

A) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Körpers im allgemeinen.

a) Ueber den Begriff: „Projektion und Umriss“ eines Körpers.

Frage 5. Was versteht man unter der rechtwinkligen Projektion eines Körpers auf eine Ebene im allgemeinen?

Erkl. 17. Sind die sämtlichen Begrenzungen eines Körpers ebene Flächen, so heisst der Körper ein Polyeder. Das Wort Polyeder stammt aus dem Griechischen ($\text{poly} = \text{viel}$ und $\text{hedra} = \text{Fläche}$) heisst also Vielflach oder Vielflächner.

Erkl. 18. Die Begrenzung der Projektion eines Körpers teilt die **Pr. Eb.** in zwei Teile, deren einer nur Punkte enthält, die als Projektionen von Punkten der Körperoberfläche aufzufassen sind, während dies für den anderen Teil der **Pr. Eb.** nicht der Fall ist. Die Begrenzungslinie der Projektion eines Körpers heisst sein scheinbarer Umriss oder seine scheinbare Contour, siehe Erkl. 19, und man unterscheidet einen ersten, zweiten, ...nten, scheinbaren Umriss, bzw. eine erste, zweite, ...nte, scheinbare Contour, je nachdem die Begrenzung der ersten, zweiten, ...nten Projektion des Körpers vorliegt.

Den wirklichen Umriss des Körpers, erhält man durch Verbindung jener Punkte am Körper, welche die Projizierenden durch den scheinbaren Umriss mit dem Körper gemein haben.

bestimmbar sein, sobald man das Dreikant $d(abc)$ kennt. Dieses ist aber zu konstruieren, denn es liegen offenbar die Dreikantsfälle 3, 4, 5 und 6 vor.

Antwort. Unter der rechtwinkligen Projektion eines Körpers auf eine Ebene versteht man die Gesamtheit der Projektionen aller Punkte, Linien und Flächen seiner Oberfläche. Da ein Körper stets einen von allen Seiten begrenzten Raum einschliesst, so wird auch seine Projektion auf eine Ebene stets ein begrenztes Stück der letzteren darstellen.

Erkl. 19. Das Wort „Contour, sprich: Kontuhr, stammt aus dem Französischen: contour und heisst Umriss.

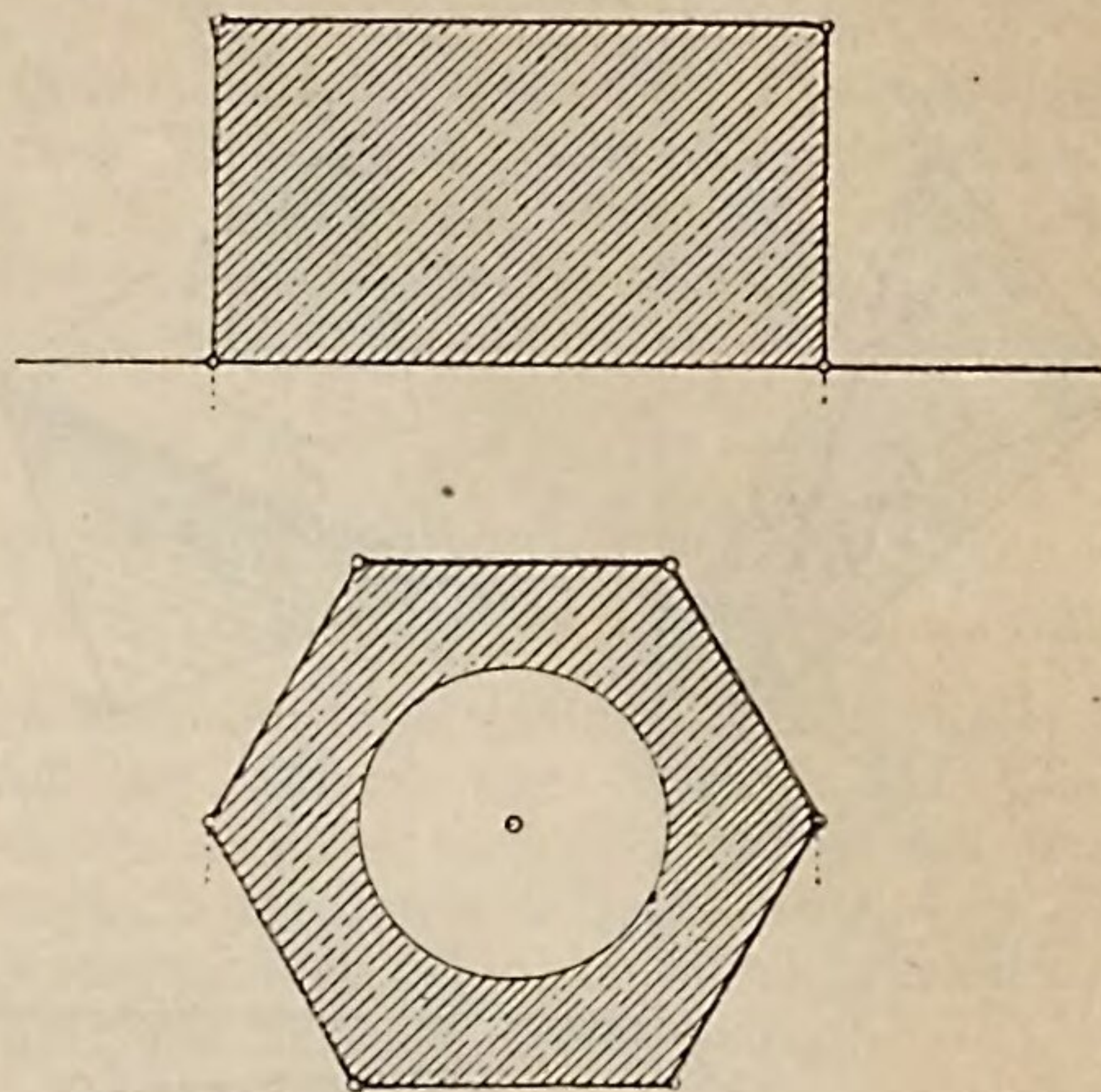
Erkl. 20. Je nach der geometrischen Beschaffenheit der Oberfläche eines Körpers und je nach seiner Lage zu den **Pr. Ebn.**, kann der scheinbare Umriss verschiedene Gestalt besitzen und entweder aus einem geschlossenen Linienzug oder aber aus mehreren solchen Linienzügen bestehen, ja es ist der Fall denkbar, dass der Umriss in der einen **Pr. Eb.** einen geschlossenen Linienzug bildet, während er in einer anderen **Pr. Eb.** aus mehreren Linienzügen zusammengesetzt ist, wie dies z. B. die Figur 14 zeigt, in welcher der zweite scheinbare Umriss durch ein Rechteck, der erste aber durch einen Kreis und ein Sechseck dargestellt ist. Der jeweils schraffierte Teil der **Pr. Eb.** bezeichnet die betreffende Projektion des Körpers.

Ist der Körper ein Polyeder, siehe Erkl. 17, so ist sein Umriss in jeder **Pr. Eb.** ein von Geraden begrenztes Vieleck.

Erkl. 21. Die Schnittlinien der Begrenzungsflächen eines Körpers sollen stets als die Kanten des Körpers bezeichnet werden.

Anmerkung 3. Wenn in der Folge von Polyedern die Rede ist, so sind darunter nur konvexe Polyeder, d. h. solche zu verstehen, deren Begrenzungen nur aus konvexen (siehe Erkl. 89, I. Teil) Vielecken zusammengesetzt sind.

Figur 14.



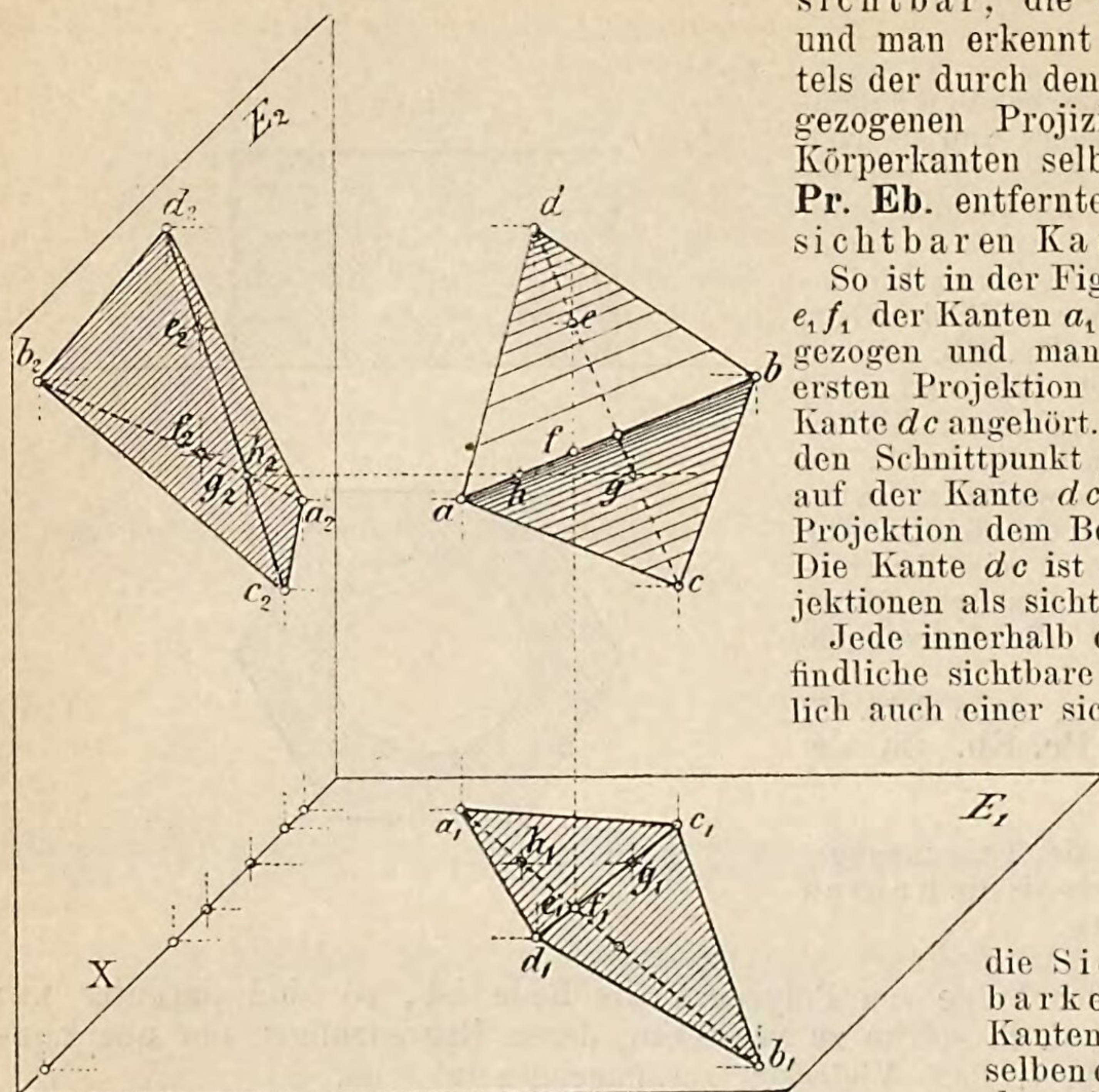
b) Ueber die Ermittlung der sichtbaren und unsichtbaren Kantenprojektionen eines Körpers.

Frage 6. Wie entscheidet man in der Projektionszeichnung über die Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit der Projektionen der Kanten des Körpers?

Antwort. Sind in der Figur 15 die Projektionen eines Körpers (Tetraëder) anschaulich dargestellt, so ist zunächst einleuchtend, dass stets die scheinbaren Umrisse des Körpers sichtbar sein werden, den Beschauer in der zur betreffenden **Pr. Eb.** senkrechten Richtung in unendlicher Ferne befindlich vorausgesetzt, siehe Erkl. 179^a, I. Teil. Sämtliche innerhalb der scheinbaren Umrisse liegenden Punkte gehören als Projektionen von Punkten des Körpers sowohl einem unsichtbaren als auch sichtbaren Punkte des Körpers an, da die durch den Punkt gezogene Projizierende den Körper in zwei Punkten schneidet. Der sichtbare Punkt ist stets der dem Auge des Beschauers näher liegende, oder was dasselbe ist, der von der betreffenden **Pr. Eb.** entferntere Punkt.

Schneiden sich demnach die Projektionen zweier Körperkanten innerhalb des schein-

Figur 15.



baren Umrisses, so ist die eine stets sichtbar, die andere aber unsichtbar, und man erkennt die sichtbare Kante mittels der durch den Schnittpunkt der Projektion gezogenen Projizierenden, welche jede der Körperkanten selbst schneidet. Der von der **Pr. Eb.** entferntere Schnittpunkt gehört der sichtbaren Kante an.

So ist in der Figur 15 durch den Schnittpunkt $e_1 f_1$ der Kanten $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ die Projizierende gezogen und man sieht, dass bezüglich der ersten Projektion der Punkt e der sichtbaren Kante dc angehört. Desgleichen liefert die durch den Schnittpunkt $g_2 h_2$ gezogene Projizierende auf der Kante dc den bezüglich der zweiten Projektion dem Beschauer sichtbaren Punkt g . Die Kante dc ist somit bezüglich beider Projektionen als sichtbare Kante zu zeichnen.

Jede innerhalb des scheinbaren Umrisses befindliche sichtbare Kante gehört selbstverständlich auch einer sichtbaren Fläche an und man erkennt in den angeführten Beispielen die Sichtbarkeit der Flächen acd und bcd für beide Projektionen.

In ähnlicher Weise lässt sich für jeden Körper über die Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit der Projektionen seiner Kanten und damit auch der dieselben enthaltenden Flächen entscheiden; in vielen Fällen wird jedoch

schon die unmittelbare Anschauung zum Ziele führen.

Anmerkung 4. In der Projektionszeichnung werden die unsichtbaren Körperkanten entweder ganz weggelassen, bezw. wenn man sie zu irgendwelchen Konstruktionen nötig hat oder aber wegen der Vollständigkeit der Projektionszeichnung nicht entbehren will, durch unterbrochene Striche angedeutet.

c) Ueber den Zusammenhang zwischen der Zahl der Projektionen von sichtbaren und unsichtbaren Flächen, Ecken und Kanten eines Polyeders sowie der Flächen, Ecken und Kanten überhaupt.

Frage 7. Besteht zwischen der Zahl der sichtbaren bzw. unsichtbaren Flächen, Ecken und Kantenprojektionen eines Polyeders ein bestimmter Zusammenhang und wenn ja, welcher?

Erkl. 22. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Summe der Winkel in einem n Ecke beträgt stets $(n-2) \cdot 180^\circ$ “.

Z. B. in einem Viereck $= (4-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ = 4$ Rechte,
in einem Achteck $= (8-2) \cdot 180^\circ = 12$ Rechte etc.

Antwort. Bezeichnet man die Zahl der sichtbaren Flächen-, Ecken- und Kantenprojektionen auf die **Pr. Eb.** E_1 mit f_1 , e_1 und k_1 , so liegen, wenn der scheinbare Umriss des Polyeders ein Vieleck von n Seiten ist, innerhalb desselben f_1 Vielecke $n_1, n_2, n_3 \dots n_p$, mit den Seitenzahlen $x_1, x_2, x_3 \dots x_p$. Die Gesamtzahl der Seiten aller dieser Vielecke wird daher sein: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p$.

Die gleiche Zahl erhält man aber auch, wenn man zur Seitenzahl n des Umrisses noch

die doppelte Seitenzahl der innerhalb des Umrisses sichtbaren Kanten, d. i. $(k_1 - n) \cdot 2$ hinzufügt, so dass die folgende Gleichheit besteht:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p = n + (k_1 - n) \cdot 2 = 2k_1 - n \dots 13)$$

Nun beträgt aber die Winkelsumme in einem Vielecke n_1 von der Seitenzahl x_1 $(x_1 - 2) \cdot 180^\circ$, siehe Erkl. 22, somit ist die Summe aller Winkel in sämtlichen Vielecken n_1 bis n_f :

$$180^\circ \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p - 2f_1)$$

oder in Rücksicht auf Gleichung 13:

$$180^\circ \cdot (2k_1 - n - 2f_1) \dots 14)$$

Genannte Winkelsumme erhält man aber auch als Summe der Winkel des Umriss-vielecks n , wozu noch die Summe der um die innerhalb des Umrisses liegenden $e_1 - n$ Ecken herumliegenden Winkel hinzuzurechnen ist. Für diese Summen findet man:

$$180^\circ \cdot (n - 2) + (e_1 - n) \cdot 360^\circ \dots 15)$$

Durch Gleichsetzen der Beziehungen 14 und 15 ergibt sich die weitere Gleichheit:

$$180^\circ \cdot (n - 2) + (e_1 - n) \cdot 2 \cdot 180^\circ = 180^\circ \cdot (2k_1 - n - 2f_1)$$

oder:

$$n - 2 + 2e_1 - 2n = 2k_1 - n - 2f_1$$

$$e_1 - 1 = k_1 - f_1$$

$$e_1 + f_1 = k_1 + 1 \dots 16)$$

Sind in gleicher Weise durch f_{11} , e_{11} und k_{11} die Anzahl der unsichtbaren Flächen-, Ecken- und Kantenprojektionen bezeichnet, so ergibt sich durch eine ähnliche Untersuchung, wie die eben geführte, die weitere Beziehung:

$$e_{11} + f_{11} = k_{11} + 1 \dots 17)$$

Durch Addition der Beziehungen 16 und 17 gewinnt man endlich die Gleichheit:

$$e_1 + e_{11} + f_{11} + f_1 = k_1 + k_{11} + 2$$

oder:

$$e + f = k + 2 \dots 18)$$

wenn durch e , f und k die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten eines Polyeders bezeichnet werden.

Die Beziehungen 16, 17 und 18 können als Sätze wie in nebenstehender Erkl. 23 angegeben, ausgedrückt werden.

Erkl. 23. Nebenstehende Antwort enthält folgende Sätze:

„In jeder rechtwinkligen Projektion eines Polyeders ist die Zahl der sichtbaren (unsichtbaren) Ecken und Flächen gleich der Zahl der sichtbaren (unsichtbaren) Kanten vermehrt um die Einheit.“

„In jedem Polyeder ist die Zahl der Ecken und Flächen gleich der Zahl der Kanten, vermehrt um zwei.“

Erkl. 23^a. Der in Erkl. 23 zuletzt genannte Satz rührt von dem berühmten Mathematiker „Euler“ her und heisst der „Euler'sche Lehrsatz über Polyeder.“

(Siehe auch Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen, erstes Buch, Frage 14 und Erkl. 11 a.)

Erkl. 24. Soll ein Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten durch seine Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 dargestellt werden, so sind zur Zeichnung eine gewisse Anzahl von Bestimmungsstücken notwendig.

d) Ueber die Zahl der Bestimmungsstücke zur Darstellung der Projektionen eines Polyeders.

Frage 8. Wie gross ist die Anzahl der Bestimmungsstücke zur Darstellung eines Polyeders von e Ecken, f Flächen und k Kanten?

Erkl. 25. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Die **Zahl der Bestimmungsstücke** zur Darstellung eines Polyeders von e **Ecken**, f **Flächen** und k **Kanten** ist gleich **der Zahl der Kanten des Polyeders**, also gleich k .“

Antwort. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume gegen die drei **Pr. Ebn.** E_1 , E_2 und E_3 sind bekanntlich seine drei Coordinaten, d. h. drei Bestimmungsstücke notwendig und ausreichend, somit müssen für e Punkte $3 \cdot e$ Bestimmungsstücke gegeben sein.

Sollen von den e Ecken etwa n_1 in der **Pr. Eb.** E_1 liegen, und diese Bestimmung darf gemacht werden, so fallen von der genannten Zahl der Bestimmungsstücke n_1 , nämlich die Abstände der n_1 Punkte von der **Pr. Eb.** E_1 weg, so dass noch $3e - n_1$ Bestimmungsstücke übrig bleiben. Will man überdies nur die Lage der Eckpunkte des Polyeders gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 feststellen, so kann die eben angegebene Zahl noch um drei vermindert werden, sie beträgt sonach nur noch $3e - n_1 - 3$. Sie ist aber immer noch zu hoch gegriffen, denn die nicht in der **Pr. Eb.** E_1 befindlichen Punkte dürfen ja nicht beliebig im Raume liegen, sondern sollen in Gruppen von $n_2, n_3 \dots n_f$ -Punkten je in einer Begrenzungsfläche des Polyeders vereinigt sein. Es dürfen daher von den Ecken dieser Vielecke nur drei durch drei, die übrigen aber nur durch zwei ihrer Coordinaten gegeben sein. Somit kommen für jedes Begrenzungs-vieleck mit n Seiten $n - 3$ Stücke in Abzug, so dass man als wirkliche Anzahl von Bestimmungsstücken für die Darstellung des Polyeders erhält:

$$3e - n_1 - 3 - (n_2 - 3) - (n_3 - 3) - \dots (n_f - 3)$$

welcher Ausdruck zunächst in folgenden übergeführt werden kann:

$$3e - 3 - (n_1 + n_2 + n_3 + \dots n_f) + (f - 1) \cdot 3$$

da der Faktor 3 ($f - 1$) mal auftritt.

Nun ist aber:

$$(n_1 + n_2 + n_3 + \dots n_f) = 2k$$

daher geht die obige Gleichung über in folgende:

$$3e - 3 - 2k + 3f - 3$$

oder:

$$3 \cdot (e + f) - 2k - 6$$

und mit Rücksicht auf Gleichung 18 in:

$$3 \cdot (k + 2) - 2k - 6 = 3k + 6 - 2k - 6 = k \quad \dots 19)$$

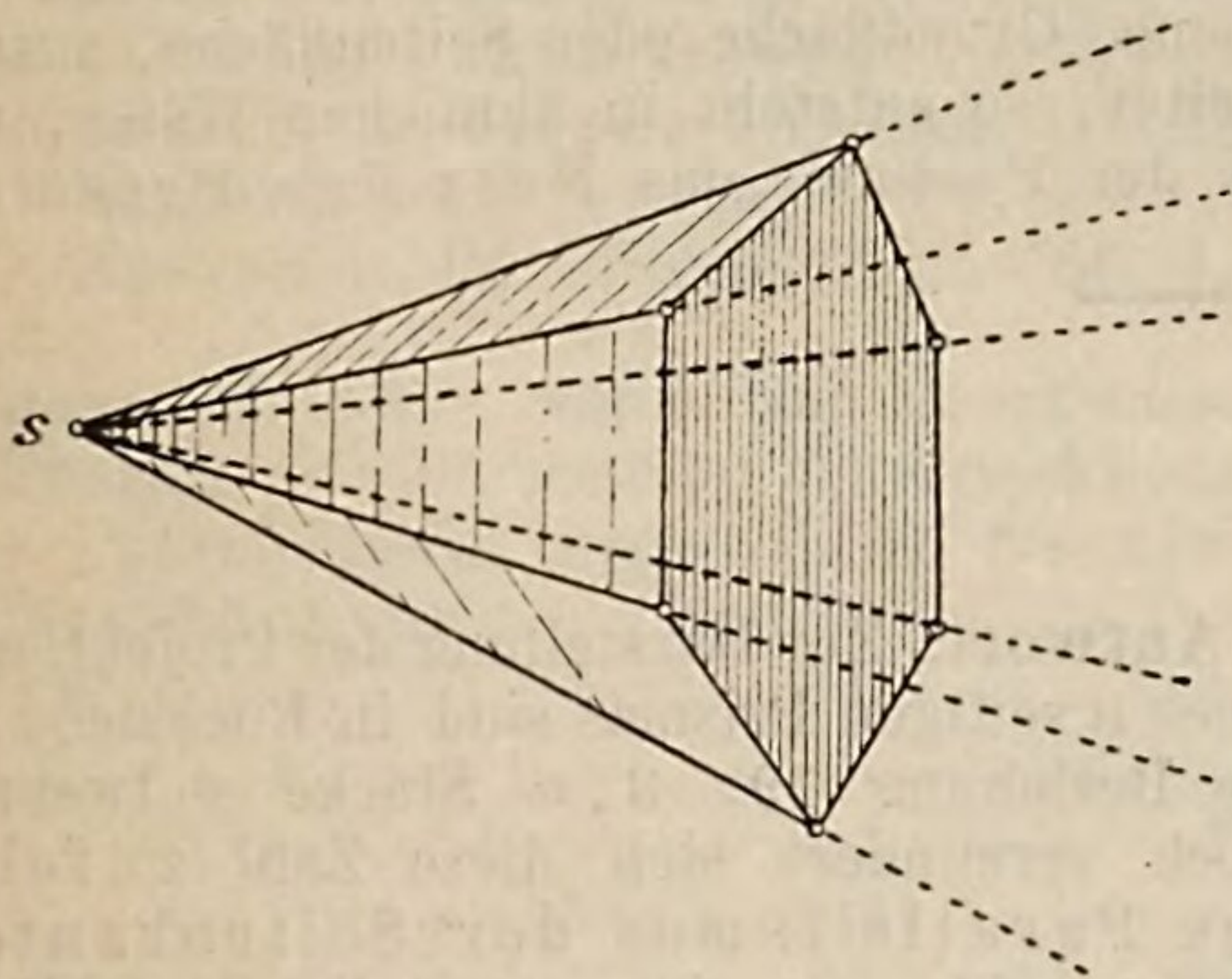
B) Ueber die rechtwinklige Projektion von Pyramiden und Prismen.

a) Ueber den Begriff einer „Pyramide“ und eines „Primas“, sowie die für die Herstellung der Projektionen dieser Körper wichtigsten Eigenschaften derselben.

Frage 9. Was versteht man im allgemeinen unter einer Pyramide?

Erkl. 26. Eine Pyramide besitzt im ganzen $2 \cdot n$ Kanten, nämlich n Seiten- und n Grundkanten. Sämtliche Seitenkanten haben den Punkt s — die Spitze der Pyramide — gemeinsam. Eine Pyramide von n Seitenkanten soll für die Folge durchweg eine n seitige Pyramide genannt werden.

Figur 16.



Antwort. Zieht man von einem Punkte s aus, siehe Figur 16, n Gerade und legt durch je zwei aufeinanderfolgende Gerade Ebenen, so entsteht eine Gesamtheit von n Ebenen, welche eine n seitige körperliche Ecke — ein n -Kant — einschliessen. Eine weitere nicht durch s gehende Ebene schneidet die ebengenannten n Ebenen nach den Seiten eines n -Ecks, welches im Verein mit den übrigen n Ebenen einen von allen Seiten begrenzten Körper einschliesst, der Pyramide heisst. Dabei bezeichnet man das n -Eck als die Grundfläche, die übrigen Begrenzungsebenen als die Seitenflächen der Pyramide. Die sämtlichen Seitenflächen bilden den Pyramidenmantel. Je zwei Seitenflächen schneiden sich nach einer Seitenkante oder Mantellinie; jede Seitenfläche hat mit der Grundfläche eine Grundkante gemein. Breitet man die sämtlichen Begrenzungsflächen einer Pyramide in eine Ebene, entweder in eine Seitenfläche oder in die Grundfläche aus, so bilden die sämtlichen nunmehr in einer Ebene liegenden Begrenzungsflächen das Netz der Pyramide.

Ist die Grundfläche der Pyramide ein reguläres (regelmässiges) Vieleck und liegt die Spitze in der durch den Grundflächenmittelpunkt zur Grundfläche gezogenen Senkrechten, so heisst die Pyramide selbst regulär oder regelmässig.

Frage 10. Wie viele Bestimmungsstücke sind zur Darstellung der Projektionen einer n seitigen Pyramide erforderlich?

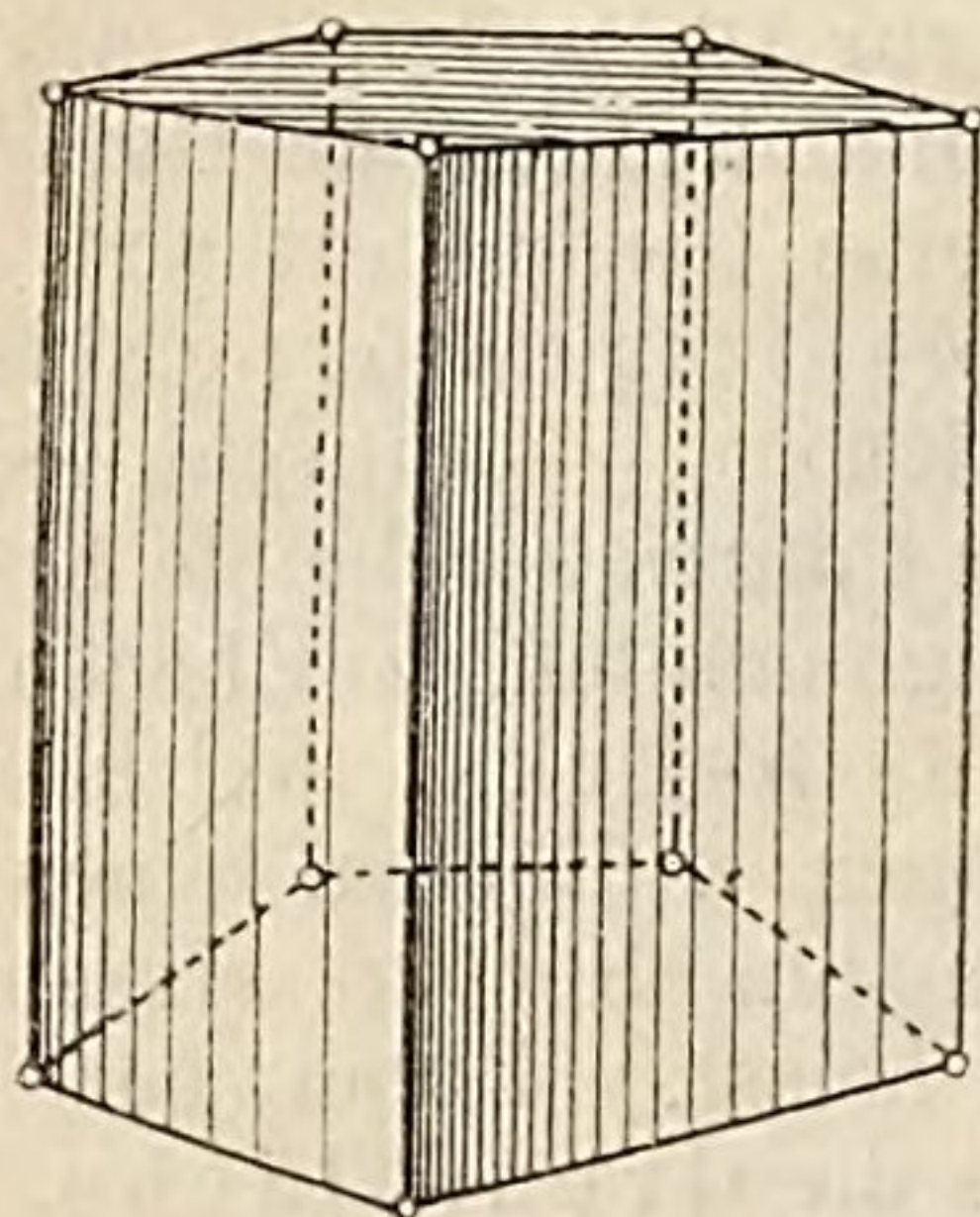
Erkl. 27. Soll ein n Kant bestimmt sein, so können, wie man sich leicht überzeugt $n - 1$ Seitenwinkel (Winkel von je zwei aufeinander folgenden Kanten), sowie $n - 2$ Flächenwinkel (Winkel zweier aufeinander folgenden Seitenflächen) beliebig gewählt werden, d. h. es sind zur Zeichnung eines n Kantes $n - 1 + n - 2 = 2 \cdot n - 3$ Bestimmungsstücke erforderlich.

Antwort. Zur Darstellung einer n seitigen Pyramide sind zufolge der Beziehung 19, siehe Erkl. 25, $2 \cdot n$ Stücke notwendig. Kennt man die Grundfläche, so ersetzt dieselbe $2 \cdot n - 3$ Stücke, so dass zur Bestimmung der Pyramidenspitze noch drei Stücke erübrigen. Ist dagegen die körperliche n seitige Ecke bekannt, so sind hiedurch gleichfalls $2 \cdot n - 3$ Stücke, siehe Erkl. 27, ersetzt, so dass zur Bestimmung der Grundfläche ebenfalls, wie auch notwendig, drei Stücke erübrigen.

Frage 11. Was versteht man im allgemeinen unter einem Prisma?

Erkl. 28. Ein Prisma besitzt im ganzen $3 \cdot n$ Kanten, und zwar $2 \cdot n$ Grund- und n Seitenkanten.

Figur 17.



Antwort Rückt bei einer Pyramide die Spitze in unendliche Ferne, so werden die Seitenkanten alle zu einander parallel und man erhält eine Schaar von n zu einer bestimmten Richtung parallelen Ebenen, siehe Figur 17. Schneidet man dieselbe ausser der bereits vorhandenen, von der Pyramide herührenden Grundfläche durch eine zweite, zu den Seitenkanten nicht parallele Ebene, so erhält man wieder einen von allen Seiten begrenzten Körper, welcher Prisma heisst. Ein Prisma hat zwei n seitige Grundflächen und n Seitenflächen. Stehen die beiden Grundflächen senkrecht zu den Seitenkanten und sind zugleich reguläre Vielecke, so heisst auch das Prisma ein reguläres n seitiges Prisma. Die Gesamtheit der Seitenflächen bildet den Prismenmantel. Werden sämtliche Seitenflächen in eine einzige Ebene, Grundfläche oder Seitenfläche, ausgebreitet, so entsteht in ähnlicher Weise, wie bei der Pyramide das Netz des Prismas.

Frage 12. Wie viele Bestimmungsstücke sind zur Darstellung der Projektionen eines n seitigen Prismas erforderlich?

Antwort. Zur Darstellung der Projektionen eines n seitigen Prismas sind in Rücksicht auf die Beziehung 19, $3 \cdot n$ Stücke notwendig. Doch vermindert sich diese Zahl zufolge des Parallelismus der Seitenkanten. Denn denkt man sich etwa die Grundfläche mit der **Pr. Eb.** E_1 zusammenfallend, so sind zu ihrer Bestimmung $2 \cdot n - 3$ Stücke notwendig; zur Bestimmung der Lage der zweiten Grundfläche braucht man noch drei Stücke, zur Bestimmung der Lage einer Seitenkante, womit auch die Lage der übrigen bestimmt ist, aber nur noch zwei, da man ja einen Punkt von ihr schon kennt.

Im ganzen sind also erforderlich $2 \cdot n - 3 + 3 + 2 = 2 \cdot n + 2 = 2 \cdot (n + 1)$ Bestimmungsstücke. Doch tritt dabei noch die Beschränkung auf, dass nur die Längen von dreien Seitenkanten gegeben sein dürfen, weil zufolge des Parallelismus der Seitenkanten, durch die Längen und die Richtung von dreien derselben, die zweite Grundfläche festgelegt ist.

b) Ueber die Zeichnung der Projektionen und des Netzes einer Pyramide und eines Prismas aus gegebenen Bestimmungsstücken.

Anmerkung 5. Soll ein Körper, von dem die notwendige Zahl von Bestimmungsstücken, bekannt sind, dargestellt, d. h. durch seine Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gezeichnet werden, so handelt es sich dabei immer darum,

mittels der gegebenen Längen, Winkel und Flächen die Lage der nicht gegebenen Stücke gegen die gegebenen zu ermitteln, so dass man im stande ist, die sämtlichen am Körper auftretenden Flächen, Kanten und Winkel in wahrer Grösse zu bestimmen.

Es kommt dabei zunächst nur die wahre gegenseitige Lage der am Körper auftretenden Begrenzungen in Betracht. Die Lage derselben gegen die **Pr. Ebn.** ist insofern willkürlich, bzw. gleichgültig, als sie ja abhängig ist von der Lage der gegebenen Bestimmungsstücke gegen die **Pr. Ebn.**, und diese vorerst beliebig angenommen sein soll. Damit aber die ganze Darstellung, d. h. die Projektionszeichnung möglichst rasch, einfach und genau sich gestaltet, gibt man den gegebenen Bestimmungsstücken eine möglichst bequeme und einfache Lage gegen die **Pr. Ebn.**, und die einfachste Lage der hier in Betracht kommenden Raumgrössen, „Gerade und Ebene,“ ist stets vorhanden, wenn diese Raumgrössen entweder in einer der **Pr. Ebn.** liegen oder aber auf einer derselben senkrecht stehen.

Kommt jedoch den gegebenen Bestimmungsstücken von vornherein eine vorgeschriebene Lage gegen die **Pr. Ebn.** zu, so ist dieses selbstverständlich auch mit dem zu zeichnenden Körper der Fall. Man wird dann, um bei der Zeichnung Vereinfachungen zu erzielen, zu dem in Anmerkung 15 I. Teil angedeuteten Mittel, der Einführung neuer **Pr. Ebn.** greifen, welche gegen den zu zeichnenden Körper, bzw. gegen die gegebenen Bestimmungsstücke die oben erwähnte einfachste Lage einnehmen, in diesen **Pr. Ebn.** die Zeichnung des Körpers herstellen und aus letzterem seine erste bzw. zweite Projektion nach Massgabe der in den Antworten der Fragen 85 und 86, I. Teil, angegebenen Verfahren konstruieren.

Frage 13. Wie wählt man zweckmässig die **Pr. Ebn.** zur Darstellung der Projektionen einer Pyramide aus gegebenen Bestimmungsstücken?

Antwort. Sollen die Projektionen einer Pyramide aus gegebenen Bestimmungsstücken dargestellt werden, so gibt man bei freier Wahl der **Pr. Ebn.** der Pyramide stets die einfachste Lage zu denselben. Diese einfachste Lage ist erreicht, wenn eine Begrenzungsfläche, entweder die Grundfläche oder eine Seitenfläche mit einer **Pr. Eb.** zusammenfällt und die andere **Pr. Eb.** auf einer Kante der genannten Begrenzungsfläche senkrecht steht. Das folgende Beispiel soll das eben Gesagte erläutern.

Aufgabe 11. Von einer n seitigen Pyramide kennt man die Grundfläche, eine Seitenfläche sowie den Winkel W_1 beider, siehe Erkl. 29. Man soll

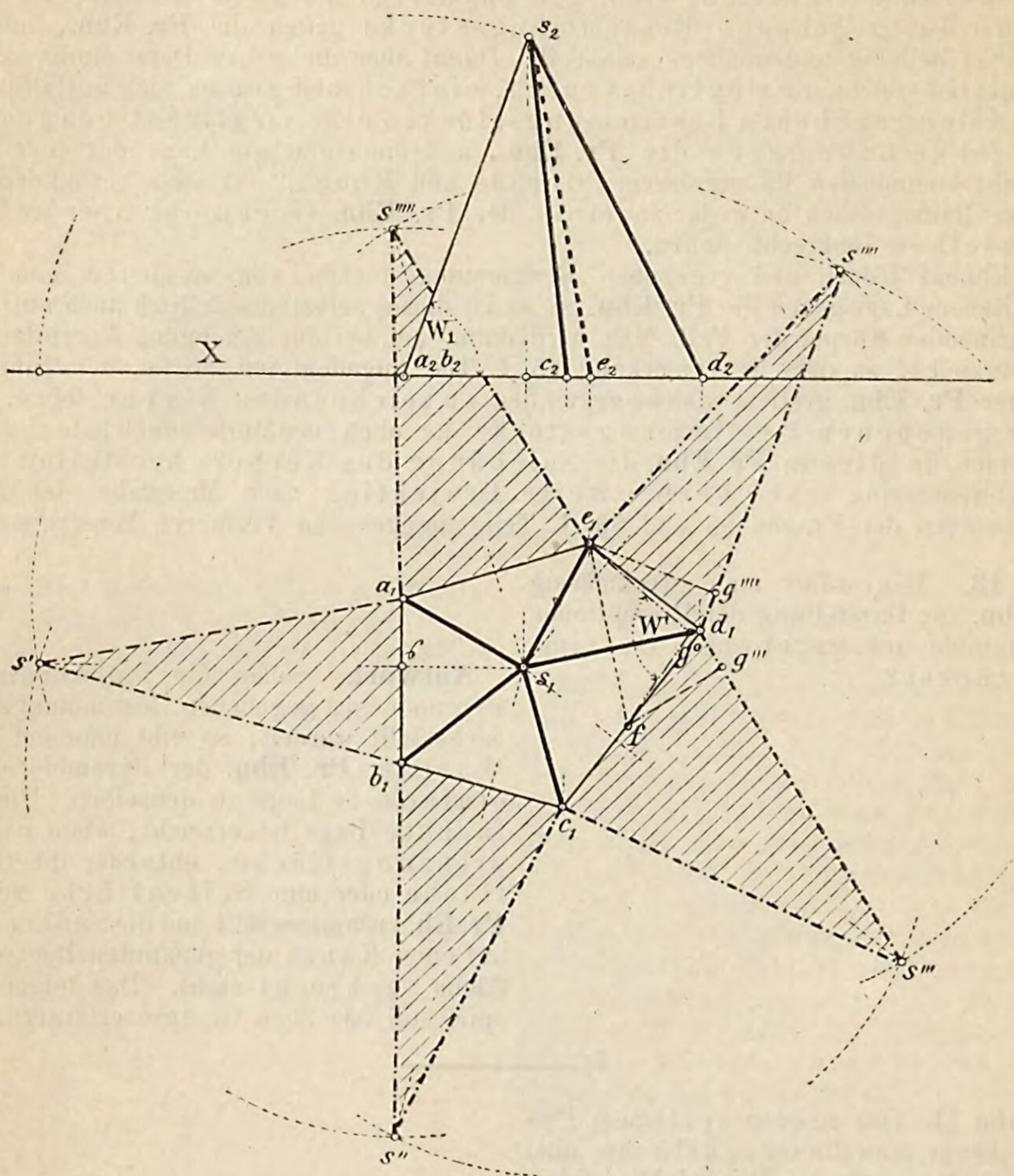
- a) die Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 ,
- b) das Netz der Pyramide zeichnen.

Erkl. 29. Die n seitige Grundfläche erfordert zu ihrer vollständigen Bestimmung $2 \cdot n - 3$ Bedingungen, sie entspricht also im Falle der nebenstehenden Aufgabe $2 \cdot n - 3$ Bestimmungsstücken; die Seitenfläche erfordert als Dreieck drei Bedingungen; da sie aber mit der Grundfläche eine Grundkante gemein hat, so sind zu ihrer Bestimmung zwei Bedingungen

Auflösung a und b. Da es sich lediglich um die Darstellung der Projektionen einer Pyramide mit den gegebenen Bestimmungsstücken handelt und über die Lage der Pyramide zu den **Pr. Ebn.** nichts festgesetzt ist, so kann man der Pyramide die einfachste Lage zu den **Pr. Ebn.** geben, d. h. man wird entweder die Grundfläche oder die gegebene Seitenfläche in die **Pr. Eb.** E_1 legen und die **Pr. Eb.** E_2 senk-

hinreichend, die gegebene Seitenfläche recht zu der der Grundfläche und gegebenen entspricht also 2 Bestimmungsstücken. Seitenfläche gemeinsamen Kante stellen. Es sind demnach thatsächlich zur Lösung der nebenstehenden Aufgabe $2.n - 3 + 2 + 1 = 2.n$ Bestimmungsstücke gegeben.

Figur 18.



Erkl. 30. Durch das Netz sind die sämtlichen Begrenzungsflächen der Pyramide und damit auch die sie begrenzenden Kanten in wahrer Grösse gezeichnet. Die wahren Grössen der Winkel zwischen den Seitenflächen und der Grundfläche sind in den zu den Seitenflächen gehörigen Konstruktionsdreiecken der Pyramiden-Spitze s enthalten.

Was schliesslich die Ermittlung der wahren Grössen der Winkel zwischen je zwei Seitenflächen anbelangt, so kann diese gleichfalls unschwer ausgeführt werden. In der Figur 18 ist der Winkel zwischen den Seitenflächen des und dcs bestimmt worden mittels einer durch e_1 senkrecht zur gemeinsamen Seitenkante ds

Man erhält folgende

1. Konstruktion. Lege, siehe Figur 18, die gegebene Grundfläche, welche als Fünfeck vorausgesetzt sein soll, nach $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$, so in die **Pr. Eb. E_1** , dass die X-Achse senkrecht zur Kante $a_1 b_1$ steht und zeichne an letztere das Dreieck $a_1 b_1 s'$ gleich der gegebenen Seitenfläche abs . Mittels des Winkels W_1 erhält man unmittelbar die zweite Projektion $a_2 b_2 s_2$ der Seitenfläche abs und damit auch die zweite Projektion s_2 der Pyramidenspitze ($\overline{s's'} = \overline{a_2 s_2}$). Hiedurch ist aber die erste Projektion s_1 gegeben und können

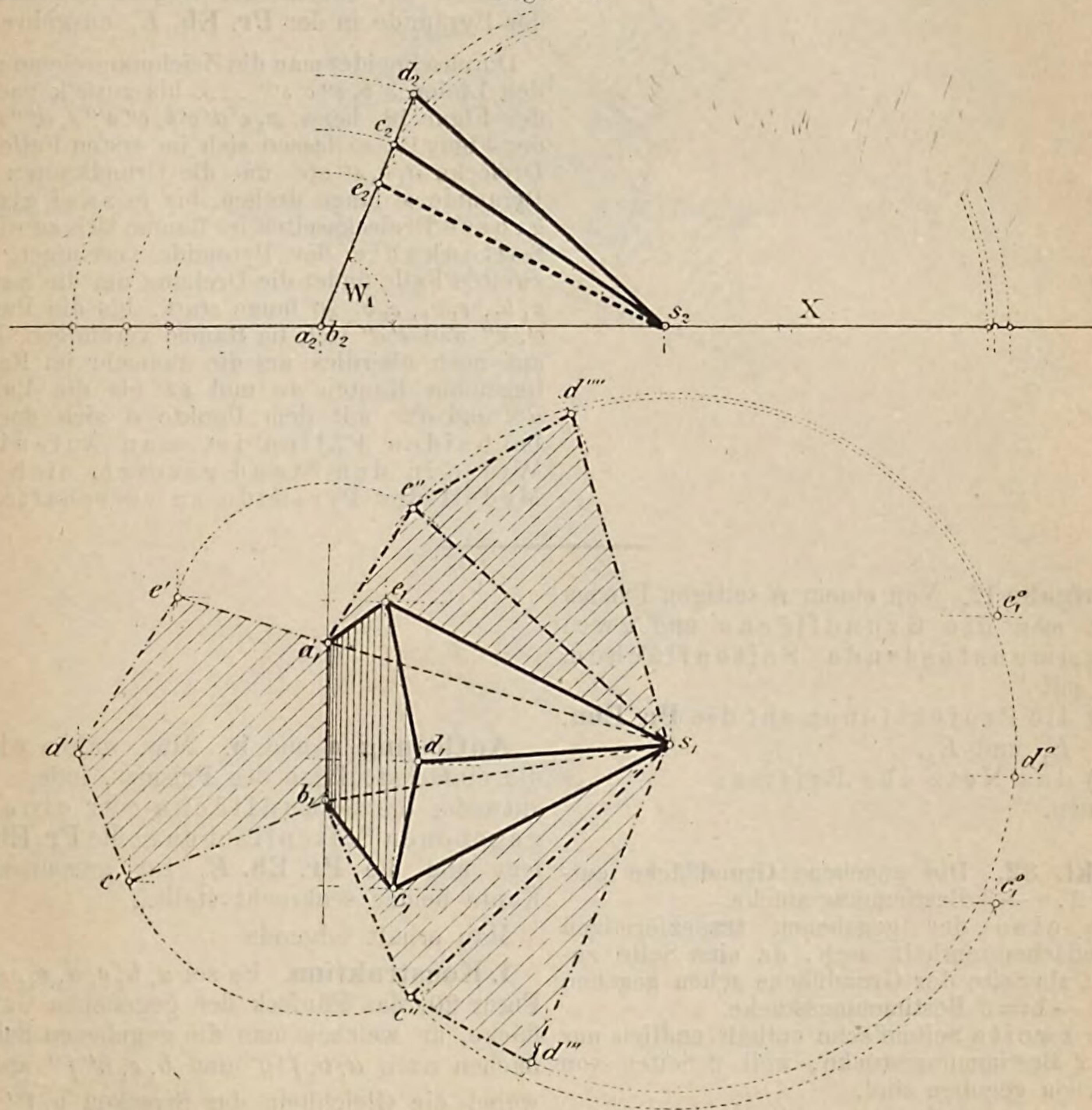
geführten Ebene, welche die beiden Ebenen nach Geraden eg und fg schneidet, deren Umlegungen e_1g'''' und fg'''' senkrecht zu d_1s'''' bzw. d_1s''' stehen. Das Dreieck e_1fg^0 mit den Seiten $e_1g^0 = e_1g''''$ und $fg^0 = fg''''$ enthält bei g^0 den Winkel W' der beiden Seitenflächen des und dcs in wahrer Grösse.

Erkl. 31. Kennt man umgekehrt das Netz der Pyramide, d. h. die sämtlichen Begrenzungsflächen in wahren Grössen, so ergibt sich daraus unmittelbar die Projektion der Pyramide. Wie?

zunehm die Projektionen der Pyramide gezeichnet werden. Durch Umlegung der Seitenflächen um ihre ersten Spuren gewinnt man das Netz der Pyramide.

Da je zwei aneinanderstossende Seitenflächen stets eine Seitenkante gemein haben, welche in der Umlegung zweimal erscheint, so lassen sich in der Figur 17 die Dreiecke b_1c_1s'' , c_1d_1s''' etc. herstellen, ohne Benützung der zweiten Projektion s_2 von s insofern ja das Dreieck a_1b_1s' von vornherein gegeben ist und die Punkte s'' , s''' etc. je in einer Senkrechten durch s_1 zur ersten Spur der bezüglichen Ebene liegen, so findet man mittels der Gleichheiten $b_1s' = b_1s''$, $c_1s'' = c_1s'''$, $d_1s''' = d_1s''''$ die Punkte s'' , s''' , s'''' unmittelbar.

Figur 19.



2. Konstruktion. Lege, siehe Figur 19, die gegebene Seitenfläche nach $a_1b_1s_1$ in die **Pr. Eb. E_1** , so dass wieder die X -Achse senkrecht zu a_1b_1 steht und füge an die Seite a_1b_1 die Umlegung a_1b_1c,d,e , der ge-

gebenen Grundfläche an, so ist mittels des Winkels W_1 und der Umlegung der Grundfläche die zweite Projektion der letzteren direkt konstruierbar, womit zugleich die Projektionen der Pyramide bestimmt sind.

Behufs Konstruktion des Netzes lege man zunächst die beiden an die Seitenkanten as und bs anstossenden Seitenflächen ase und bse nach a_1s_1e'' und b_1s_1c'' in die **Pr. Eb.** E_1 um und füge etwa, wie die Figur 19 zeigt, an diese Dreiecke je ein Dreieck $s_1e''d''''$ und $s_1c''d''''$ kongruent den räumlichen Dreiecken sed und sdc , von welchen die Seiten se , sc , cd und ed unmittelbar gegeben sind, die Seite sd aber wie in Antw. der Frage 72, I. Teil gleich $s_1d_1^0$ bestimmbar ist, so sind hiedurch die sämtlichen Begrenzungsflächen der Pyramide in der **Pr. Eb.** E_1 ausgebreitet.

Durchschneidet man die Zeichnungsebene nach den Linien $s'b_1s''c's''' \dots$ bis zurück nach s' der Figur 18, bzw. $a_1e'd'c'b_1c''d''''s_1d''''c''a_1$ der Figur 19, so lassen sich im ersten Falle die Dreiecke a_1b_1s' etc. um die Grundkanten der Pyramide so lange drehen, bis je zwei gleich grosse Dreiecksseiten im Raume sich zu einer Seitenkante der Pyramide vereinigen. Im zweiten Falle findet die Drehung um die Kanten a_1b_1 , s_1a_1 , s_1b_1 so lange statt, bis die Punkte c' , c'' und $e'e''$ sich im Raume vereinigen, hierauf noch überdies um die nunmehr im Raume liegenden Kanten sc und se bis die Punkte d'''' und d'''' mit dem Punkte d sich decken. In beiden Fällen ist man auf diese Weise in den Stand gesetzt, sich ein Modell der Pyramide zu verschaffen.

Aufgabe 12. Von einem n seitigen Prisma kennt man die Grundfläche und zwei zusammenstossende Seitenflächen. Man soll

- die Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 ,
- das Netz des Prismas zeichnen.

Erkl. 32. Die gegebene Grundfläche enthält: $2 \cdot n - 3$ Bestimmungsstücke.

Die eine der gegebenen trapezförmigen Seitenflächen enthält noch, da eine Seite zugleich als Seite der Grundfläche schon gegeben ist: $4 - 1 = 3$ Bestimmungsstücke.

Die zweite Seitenfläche enthält endlich nur noch 2 Bestimmungsstücke, weil 2 Seiten von ihr schon gegeben sind.

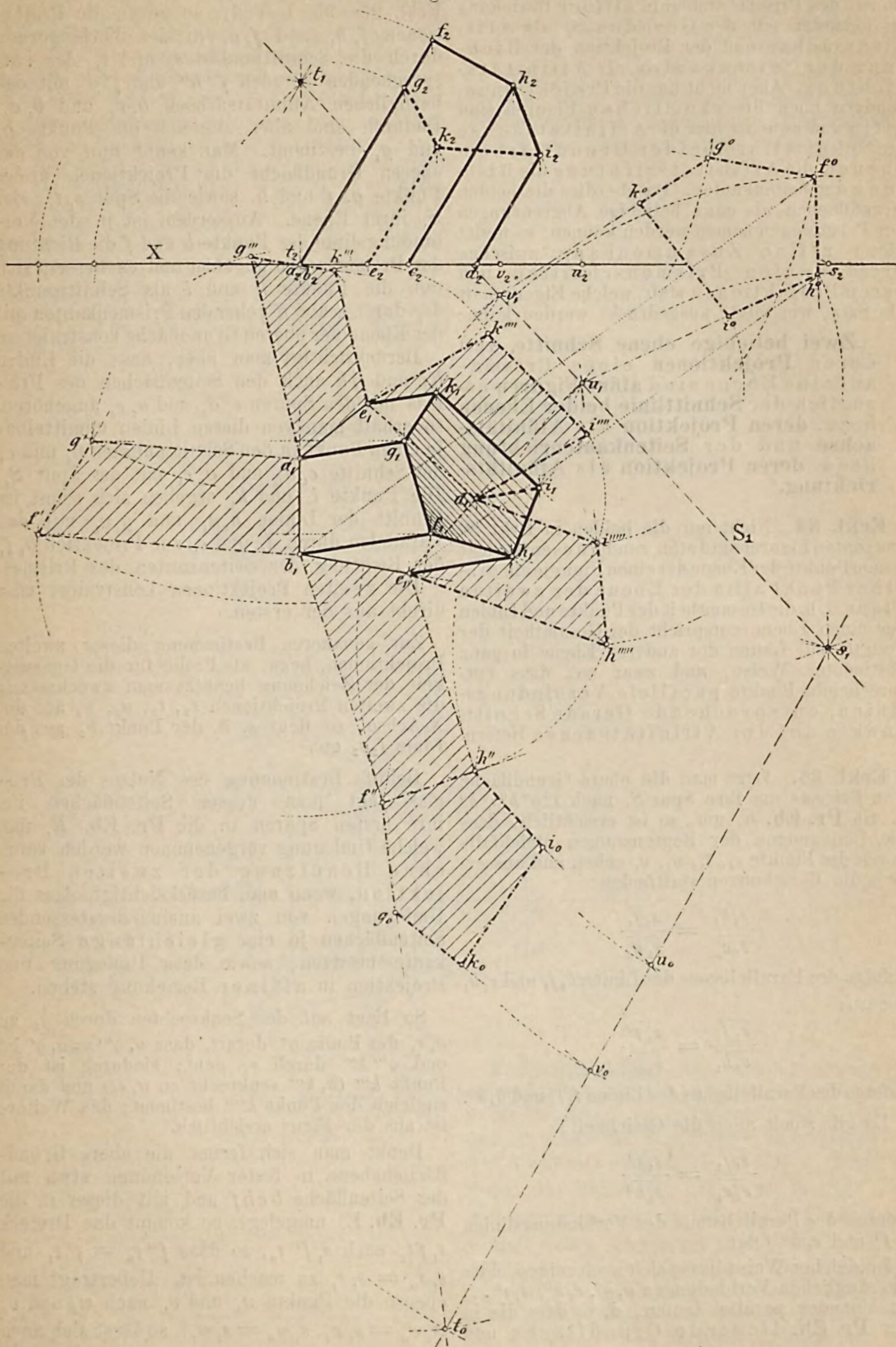
Im ganzen enthalten somit die gegebenen Flächen: $2 \cdot n - 3 + 3 + 2 = 2 \cdot n + 2 = 2 \cdot (n + 1)$ Bestimmungsstücke.

Auflösung a und b. Man wähle wieder die einfachste Lage des Prismas, indem man entweder die Grundfläche oder eine der gegebenen Seitenflächen in die **Pr. Eb.** E_1 legt und die **Pr. Eb.** E_2 zur gemeinsamen Kante beider senkrecht stellt.

Man erhält folgende

1. Konstruktion. Es sei $a_1b_1c_1d_1e_1$, siehe Figur 20, das Fünfeck der gegebenen Grundfläche, an welches man die gegebenen Seitenflächen nach $a_1b_1f'g'$ und $b_1c_1h''f''$ anlegt, wobei die Gleichheit der Strecken b_1f'' und b_1f' vorausgesetzt sein muss. Durch die beiden Umlegungen f' und f'' ergibt sich unmittelbar der Punkt f_1 und mittels f_1 und f' auch f_2 . Da ferner Umlegung und Projektion affine Figuren sind mit der be-

Figur 20.



Erkl. 33. Die beiden Grundflächenprojektionen des Prismas stehen in affiner Beziehung zu einander mit der Geraden S_1 als Affinitätsachse und der Projektion der Richtung der Seitenkanten als Affinitätsrichtung. Aber nicht nur die Projektionen, sondern auch die räumlichen Figuren sind affin und zwar ist hier die Affinitätsachse die Schnittlinie beider Grundflächenebenen, die Affinitätsrichtung die Richtung der Seitenkanten. Da überdies die beiden Grundflächen als ganz beliebige Abgrenzungen der Prismas genommen werden können, so findet dieser affine Zusammenhang zwischen irgend zweien Prismenschnitten und deren Projektionen statt, welche Eigenschaft als Satz, wie folgt, ausgedrückt werden kann:

„Zwei beliebige ebene Schnitte und deren Projektionen eines Prismas auf eine Ebene sind affine Figuren bezüglich der Schnittlinie beider Ebenen bzw. deren Projektion als Affinitätsachse und der Seitenkantenrichtung bzw. deren Projektion als Affinitätsrichtung.“

Erkl. 34. Nicht nur die beiden in Erkl. 33 genannten Figuren sind affin, sondern es entspricht jedem Punkte der Ebene der einen Figur je ein einziger Punkt affin der Ebene der zweiten Figur, d. h. die Gesamtheit der Punkte und Linien der einen Ebene entspricht der Gesamtheit der Punkte und Linien der anderen Ebene in ganz bestimmter Weise, und zwar so, dass entsprechende Punkte parallele Verbindungslinien, entsprechende Gerade Schnittpunkte auf der Affinitätsachse liefern.

Erkl. 35. Legt man die obere Grundfläche des Prismas um ihre Spur S_1 nach $j^0 g^0 h^0 i^0 k^0$ in die **Pr. Eb.** E_1 um, so ist ersichtlich, dass die Umlegungen der Begrenzungen gleichfalls durch die Punkte s_1, t_1, u_1, v_1 gehen und ausserdem die Beziehungen stattfinden:

$$\frac{\overline{s_1 b_1}}{s_1 c_1} = \frac{\overline{s_1 f_1}}{s_1 h_1}$$

zufolge des Parallelismus der Linien $b_1 f_1$ und $c_1 h_1$ ebenso:

$$\frac{\overline{s_1 f_1}}{s_1 h_1} = \frac{\overline{s_1 f^0}}{s_1 h^0}$$

zufolge des Parallelismus der Linien $f_1 f^0$ und $h_1 h^0$.

Es gilt somit auch die Gleichheit:

$$\frac{\overline{s_1 f_1}}{s_1 c_1} = \frac{\overline{s_1 f^0}}{s_1 h^0}$$

woraus der Parallelismus der Verbindungslinien $b_1 f^0$ und $c_1 h^0$ folgt.

In gleicher Weise liesse sich auch zeigen, dass die sämtlichen Verbindungen $a_1 g^0, e_1 k^0, d_1 i^0 \dots$ zu einander parallel laufen, d. h. dass die in der **Pr. Eb.** liegende Grundfläche und

zughlichen Spur als Affinitätsachse (siehe Erkl. 93—95, I. Teil), so gehen die Projektionen $f_1 h_1$ und $f_1 g_1$ in der Verlängerung durch die Schnittpunkte s_1 und t_1 der entsprechenden Geraden $f'' h''$ und $f' g'$ mit den bezughlichen Affinitätsachsen $b_1 c_1$ und $b_1 a_1$. Dadurch sind aber zugleich die Punkte h_1 und g_1 bestimmt. Man kennt nun von der oberen Grundfläche die Projektionen dreier Punkte g, f und h , sowie die Spur $s_1 t_1$ oder S_1 ihrer Ebene. Ausserdem ist in der Verbindungslinie der Punkte b und f die Richtung der Prismakanten gegeben und es liessen sich nun die Punkte k und i als Schnittpunkte der durch e und d gehenden Prismenkanten mit der Ebene der oberen Grundfläche konstruieren.

Berücksichtigt man aber, dass die Linien hi und gk auch den Seitenflächen des Prismas mit den Spuren $c_1 d_1$ und $a_1 e_1$ angehören, so erhält man von diesen Linien unmittelbar je einen Punkt in den Schnittpunkten u_1 und v_1 der Schnitte $c_1 d_1$ und $a_1 e_1$ mit der Spur S_1 . Die Punkte i_1 und k_1 ergeben sich somit im Schnitt der Linien $h_1 u_1$ und $g_1 v_1$ mit den Parallelen durch d_1 und e_1 zur Projektion $b_1 f_1$ der Richtung der Seitenkanten des Prismas.

Die zweiten Projektionen konstruiert man direkt aus der ersten.

Zur genaueren Bestimmung dieser zweiten Projektionen, bzw. als Probe für die Genauigkeit der Zeichnung benützt man zweckmässig die zweiten Projektionen s_2, t_2, u_2, v_2 auf der X-Achse, so liegt z. B. der Punkt h_2 auf der Linie $f_2 s_2$ etc.

Behufs Bestimmung des Netzes des Prismas legt man dessen Seitenflächen um ihre ersten Spuren in die **Pr. Eb.** E_1 um, welche Umlegung vorgenommen werden kann, ohne Benützung der zweiten Projektion, wenn man berücksichtigt, dass die Umlegungen von zwei aneinanderstossenden Seitenflächen je eine gleichlange Seitenkante besitzen, sowie dass Umlegung und Projektion in affiner Beziehung stehen.

So liegt auf der Senkrechten durch g_1 zu $a_1 e_1$ der Punkt g''' derart, dass $a_1 g''' = a_1 g'$ ist und $g''' k'''$ durch v_1 geht; hiedurch ist der Punkt k''' ($k_1 k'''$ senkrecht zu $a_1 e_1$) und damit zugleich der Punkt k'''' bestimmt; das Weitere ist aus der Figur ersichtlich.

Denkt man sich ferner die obere Grundflächenebene in fester Verbindung etwa mit der Seitenfläche $bchf$ und mit dieser in die **Pr. Eb.** E_1 umgelegt, so kommt das Dreieck $s_1 f t_1$ nach $s_1 f'' t_0$, so dass $f'' t_0 = f' t_1$ und $s_1 t_0 = s_1 t_1$ zu machen ist. Ueberträgt man ebenso die Punkte u_1 und v_1 nach u_0 und v_0 ($s_1 v_0 = s_1 v_1, s_1 u_0 = s_1 u_1$), so lässt sich auch

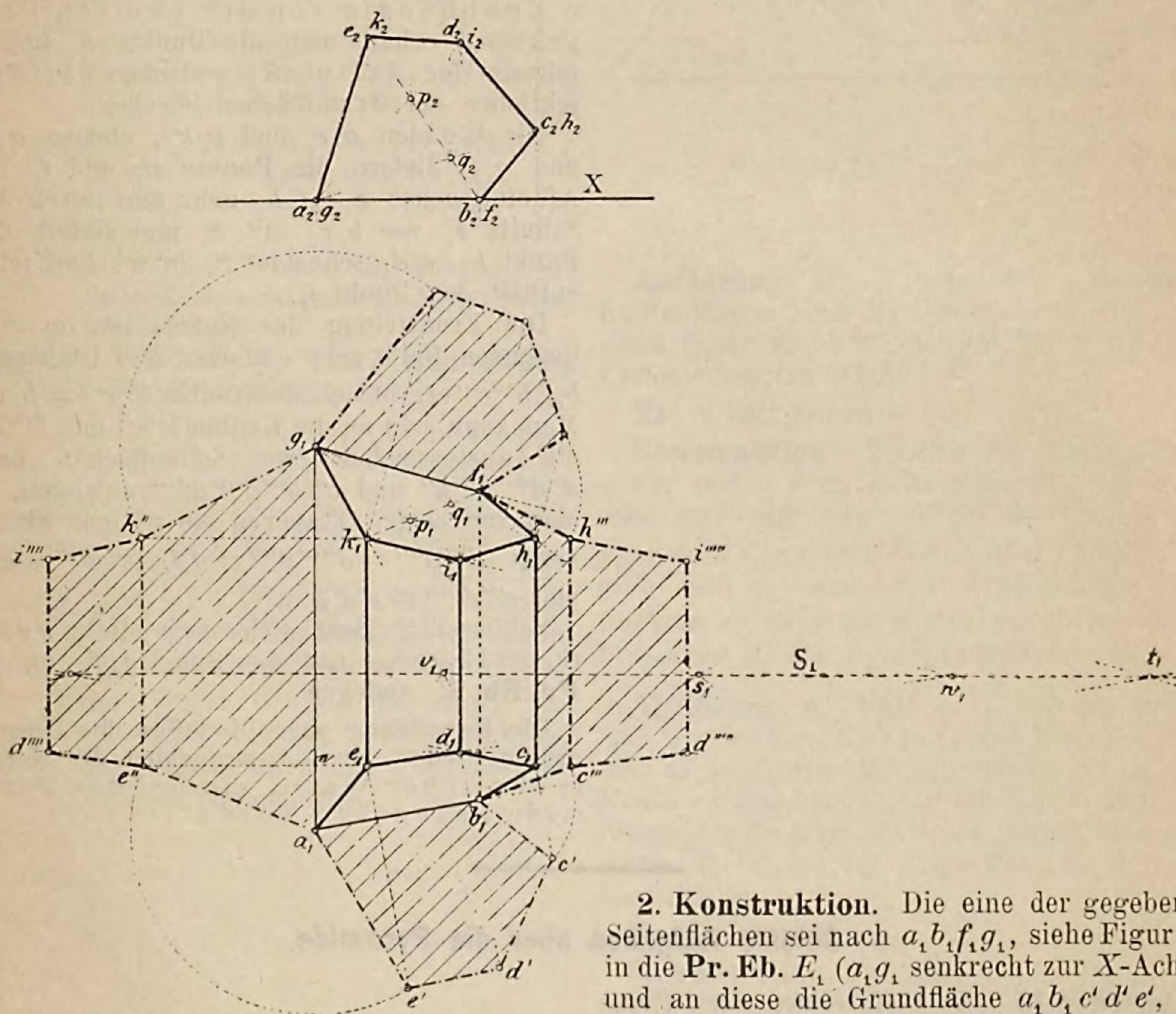
die Umlegung der oberen Grundfläche affine Figuren sind mit der Schnittlinie der beiden Grundflächenebenen als Affinitätsachse. Die Affinitätsrichtung ist bestimmt, sobald man die Umlegung eines einzigen Punktes der oberen Grundfläche kennt.

Aus vorstehender Erklärung und in Rücksicht auf die Erkl. 33 folgt der Satz:

„Irgend zwei ebene Prismenschnitte sind **affine** Figuren und bleiben **affin**, wenn beide Ebenen um ihre gemeinsame Schnittlinie in eine einzige Ebene ausgebreitet werden. Diese Affinität ist nicht allein auf die Schnittfiguren beschränkt, sondern erstreckt sich auf die Gesamtheit aller Punkte und Linien beider Ebenen.“

die wahre Gestalt der zweiten Grundfläche zeichnen, wenn man $f''g_0 = f'g'$ macht, g_0v_0 und $h''v_0$ zieht und auf diesen Linien die Strecken $g_0k_0 = g'''k'''$ und $h''i_0 = h''''i''''$, abträgt. Die sämtlichen nunmehr in der Zeichnungsebene befindlichen Begrenzungsflächen des Prismas bilden dessen Netz.

Figur 21.



2. Konstruktion. Die eine der gegebenen Seitenflächen sei nach $a_1 b_1 f_1 g_1$, siehe Figur 21, in die **Pr. Eb.** E_1 ($a_1 g_1$ senkrecht zur X -Achse) und an diese die Grundfläche $a_1 b_1 c' d' e'$, sowie die zweite Seitenfläche $a_1 g' k'' e''$ angelegt, wobei die Gleichheit der Strecken $\overline{a_1 e''}$ und $\overline{a_1 e'}$ vorausgesetzt ist. Mittels e'' und e' bestimmt sich e_1 und damit auch e_2 ($e e'' = \overline{a_2 e_2}$), wodurch auch k_1 ($e_1 k_1$ parallel $a_1 g_1$) gegeben ist. Aus der Umlegung der Grundfläche und den Projektionen e_1 und e_2 eines Punktes von ihr bestimmen sich auch die Projektionen der

übrigen Punkte d und c . Von der zweiten Grundfläche kennt man nun drei Punkte g, k, f und es bleiben noch die Projektionen von zweien Punkten, nämlich von h und i zu ermitteln, was auf zweifache Weise geschehen kann.

Zufolge des Senkrechtstehens der Seitenkanten des Prismas zur **Pr. Eb. E_2** fällt die zweite Projektion der zweiten Grundfläche mit der zweiten Projektion der ersten zusammen und die zweiten Projektionen h_2 und i_2 decken sich mit c_2 und d_2 . Zieht man daher die Gerade $k f$, so wird $k_2 f_2$ von den Geraden $g_2 i_2$ und $g_2 h_2$ in Punkten p_2 und q_2 getroffen, denen auf $k_1 f_1$ die Punkte p_1 und q_1 so entsprechen, dass die Verbindungslinien $g_1 p_1$ und $g_1 q_1$ die Punkte i_1 und h_1 enthalten.

Unabhängig von der zweiten Projektion erhält man die Punkte h_1 und i_1 mittels der Affinität zwischen den Projektionen der Grundflächenvielecke.

Die Geraden $a_1 e_1$ und $g_1 k_1$, ebenso $a_1 b_1$ und $g_1 f_1$ liefern die Punkte v_1 und t_1 der Affinitätsachse S_1 ; $f_1 h_1$ geht nun durch den Schnitt s_1 von $b_1 c_1$ mit S_1 und liefert den Punkt h_1 , $e_1 d_1$ schneidet S_1 in w_1 und $w_1 k_1$ enthält den Punkt i_1 .

Die Ermittlung des Netzes ist im vorliegenden Falle sehr einfach. Die Umlegung $b_1 f_1 h'' c''$ ergibt sich unmittelbar ($b_1 c'' = b_1 c'$). Man kann nun an die Kanten $k'' e''$ und $h'' c''$ die anstossenden zwei Seitenflächen nach $e'' d'' i'' k''$ und $c'' h'' i'' d''$ antragen, da man von beiden Trapezen die nötigen Stücke kennt ($d'' i'' = d'' i'' = d_1 i_1$, $e'' d'' = e' d'$ und $c'' d'' = c' d'$).

Schliesslich lässt sich noch die zweite Grundfläche um die Spur $g_1 f_1$ in die **Pr. Eb. E_1** umlegen.

Die Herstellung eines Modelles des Prismas erfolgt wieder durch Ausschneiden des Netzes in ähnlicher Weise wie bei der Pyramide angegeben wurde.

c) Gelöste Aufgaben über die Pyramide.

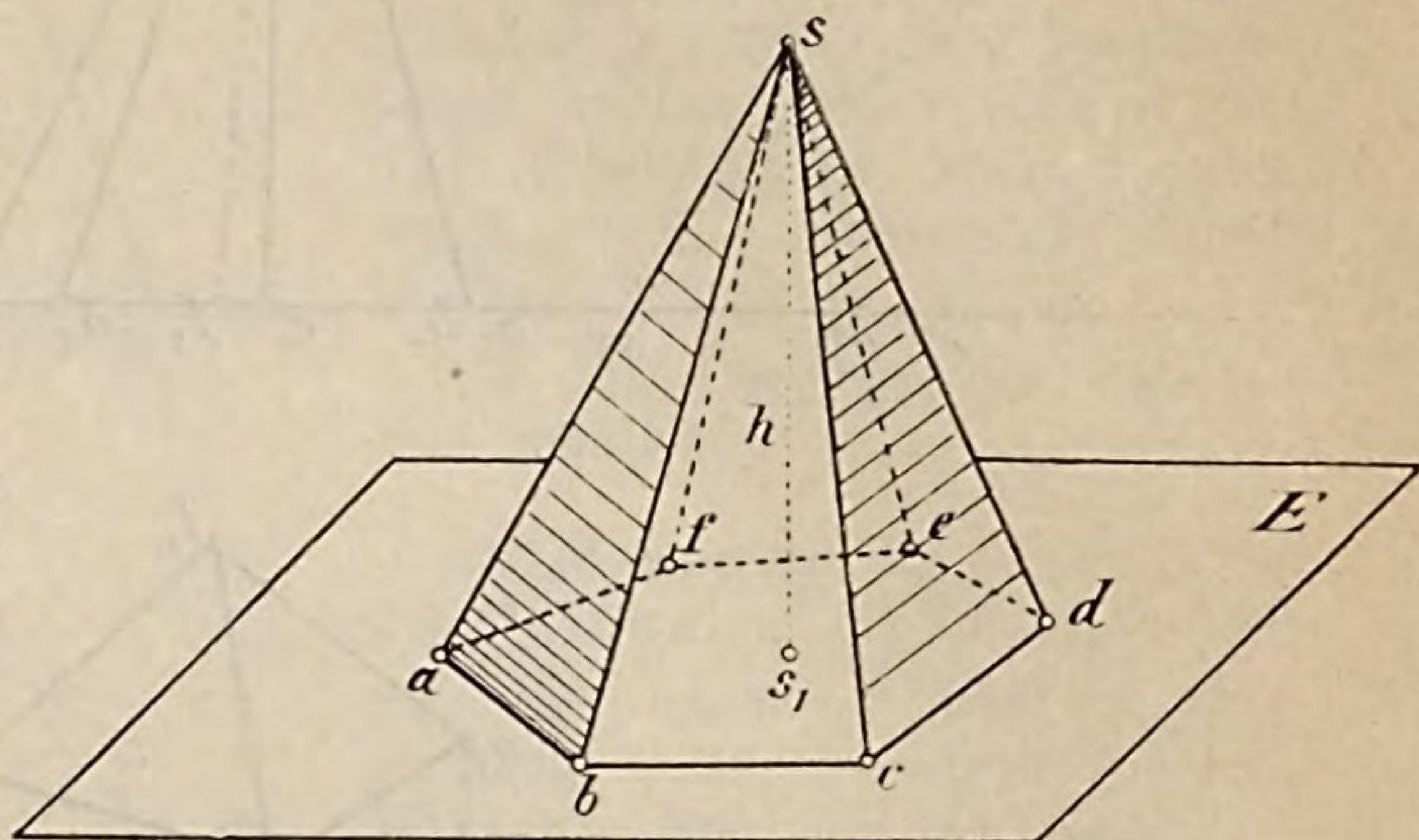
Aufgabe 13. Die Projektionen einer Pyramide sind zu zeichnen, wenn gegeben sind die Grundfläche $abcdef$, siehe Figur 22, sowie

- a) **dreinichtaufeinanderfolgende Seitenkanten**, etwa as , cs und es ,
- b) **zwei Seitenkanten**, etwa as , cs , sowie
 - a) der Neigungswinkel w_1 einer derselben etwa cs mit der Grundfläche,

- β) die Höhe $\overline{s_1 s} = h$ der Pyramide,
 γ) der Winkel W_1 einer die beiden gegebenen Seitenkanten nicht enthaltenden Seitenfläche;
- c) eine Seitenkante $\overline{as}$, sowie die Winkel w_1 und w_1' von zweien nicht gegebenen Seitenkanten mit der Grundfläche,
- d) die Winkel w_1 , w_1' und w_1'' von dreien beliebigen Seitenkanten mit der Grundfläche,
- e) die Winkel W_1 , W_1' und W_1'' von dreien beliebigen Seitenflächen mit der Grundfläche,
- f) die Winkel W_1 und W_1' von zweien Seitenflächen mit der Grundfläche, sowie
- a) die Höhe,
 β) der Winkel w_1 einer in einer gegebenen Seitenfläche liegenden Seitenkante,
 γ) der Winkel w_1' einer nicht in einer gegebenen Seitenfläche liegenden Seitenkante,
 δ) der Winkel W einer an die gegebene Seitenfläche anstossenden Seitenfläche, mit letzterer,
- g) der Winkel W_1 einer Seitenfläche mit der Grundfläche, sowie
- a) die Winkel w_1 und w_1' der beiden in ihr liegenden Seitenkanten,
 β) die Winkel w_1 und w_1' zweier nicht in ihr liegenden Seitenkanten,
 γ) die Winkel W und W' der beiden an die gegebene Seitenfläche anstossenden Seitenflächen mit ersterer,
 δ) die Winkel W und W' einer anstossenden und einer nicht anstossenden Seitenfläche mit der gegebenen Seitenfläche.

mit der Grundfläche

Figur 22.



Auflösung a. Mittels der gegebenen Kantenlängen sind die Dreiecke asc und cse , siehe Figur 22, bestimmt, wodurch sich die Pyramidenspitze ergibt.

Man erhält folgende

Konstruktion. Zeichne die Umlegungen $a_1 s' c_1$ und $c_1 s'' e_1$, siehe Figur 23, der Dreiecke asc und cse mittels der gegebenen Längen $\overline{as}$, $\overline{cs}$ und $\overline{es}$. Aus s' und s'' ergibt sich s_1 und mit Zuhilfenahme des Punktes s''' ($a_1 s' = a_1 s'''$) auch die zweite Projektion s_2 der Pyramidenspitze.

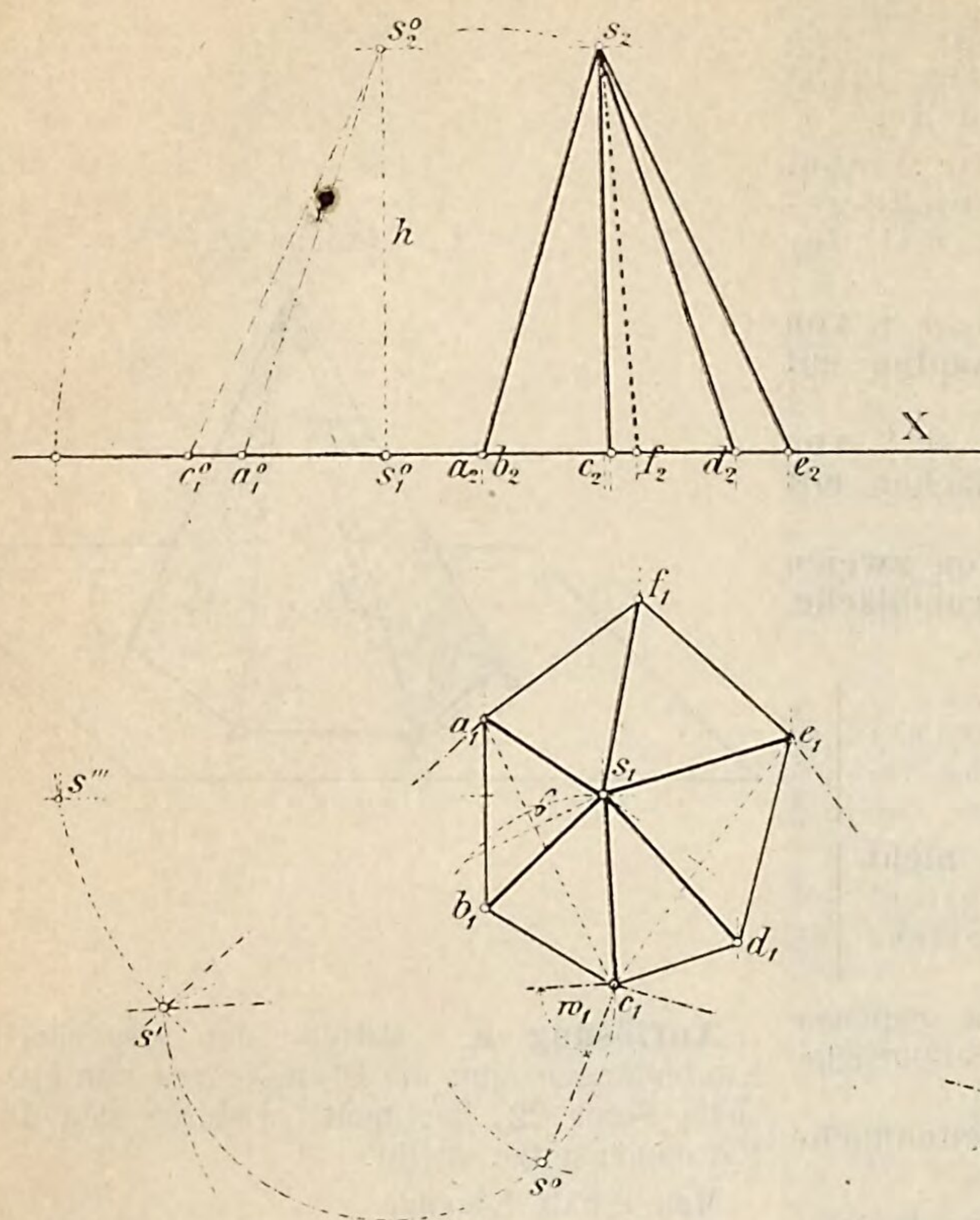
Auflösung b. Fall a. Zunächst kennt man die wahre Gestalt des Dreiecks asc und da ausserdem der Neigungswinkel w_1 der Kante sc gegeben ist, so lässt sich damit die Länge der Projektion $s_1 c_1$ der Kante sc , siehe Antw. der Frage 16, sowie Erkl. 48, I. Teil, konstruieren.

Man erhält folgende

Konstruktion. Zeichne, siehe Figur 23, das Dreieck $a_1 s' c_1$ mit den gegebenen Längen $\overline{as}$ und $\overline{cs}$ und über $s' c_1$ das rechtwinklige Dreieck $s' c_1 s''$ mit dem gegebenen Winkel w_1 bei c_1 . Die Strecke $\overline{s_1 s''}$ ist gleich der Länge der Projektion $s_1 c_1$ von sc , wodurch der Punkt s_1 und damit auch s_2 bestimmt ist.

Wie viele Lösungen der Aufgabe sind möglich? Wann ist die Aufgabe nicht mehr möglich?

Figur 23.



Fall β . Die gegebene Höhe h , siehe Figur 22, bestimmt im Verein mit den beiden Längen $\overline{as}$ und $\overline{cs}$ die Längen der Projektionen $\overline{a_1s_1}$ und $\overline{c_1s_1}$, wodurch der Punkt s_1 und damit auch der Punkt s_2 konstruierbar ist.

Man erhält folgende

Konstruktion. Zeichne, siehe Figur 23, zwei rechtwinklige Dreiecke $s_1^0s_2^0a_1^0$ und $s_1^0s_2^0c_1^0$ mit der gegebenen Höhe als Kathete und den Seitenlängen $\overline{as}$ und $\overline{cs}$ als Hypotenusen, so sind in den Strecken $s_1^0a_1^0$ und $s_1^0c_1^0$ die Längen der ersten Projektionen $\overline{s_1a_1}$ und $\overline{s_1c_1}$ gegeben.

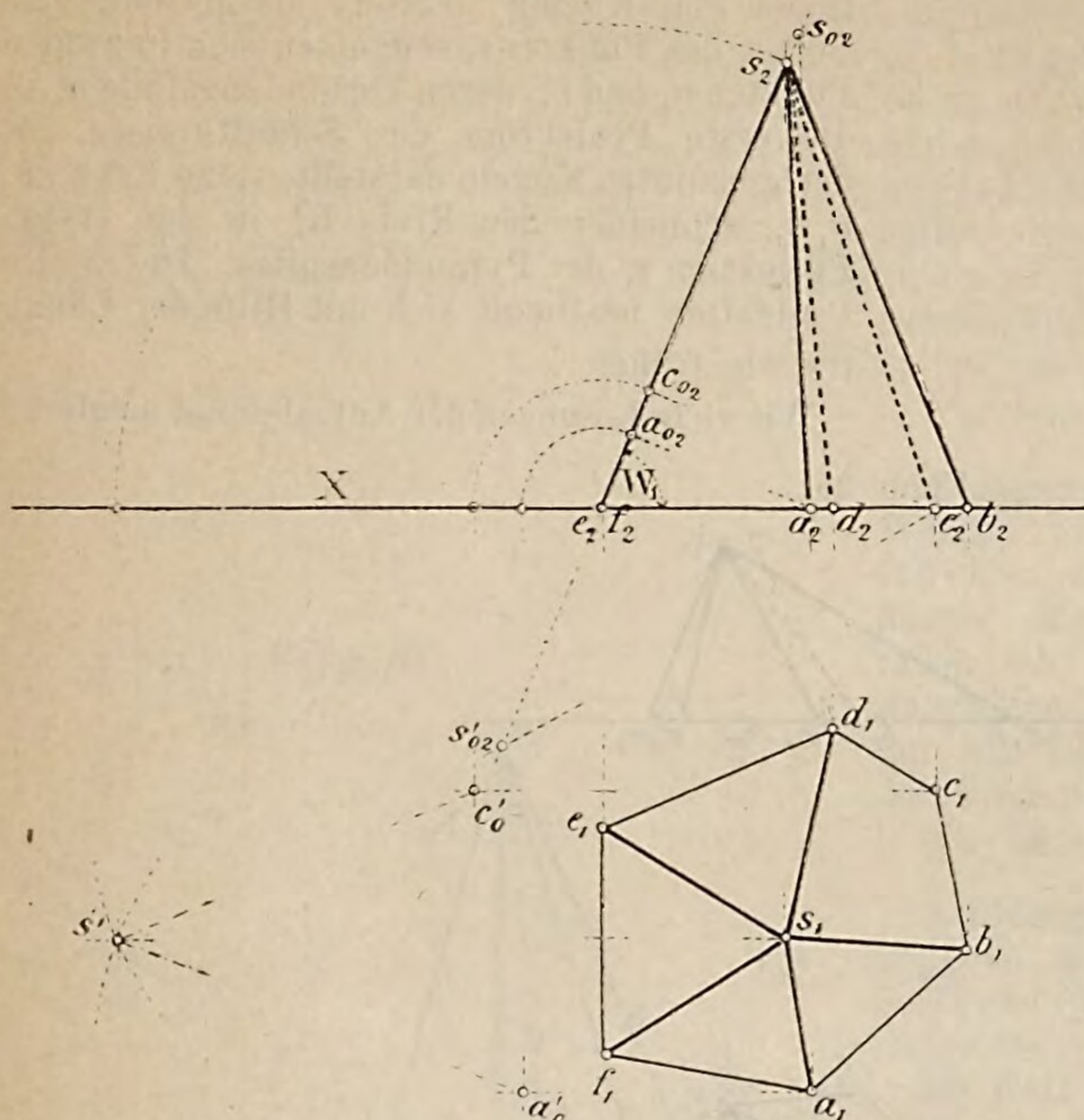
Hätte man das Dreieck $a_1s_1c_1$ mit den gegebenen Seitenkantenlängen gezeichnet, so könnte man auch mittels der Strecke $\overline{s_1s}$ als Hypotenuse und der Höhe h als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, dessen andere Kathete dann gleich der Länge $\overline{ss_1}$ sein müsste.

Fall γ . Ist etwa der Winkel W_1 der Seitenfläche efs gegeben, so wird man zweckmässig diese Seitenfläche senkrecht zur **Pr. Eb. E_2** stellen. Mittels der beiden gegebenen Längen $\overline{as}$ und $\overline{cs}$ ist nun die Lage des Punktes s in der Ebene sac festgelegt; denn denkt man sich von den Punkten a und c Senkrechte aa_0 und cc_0 zur Ebene efs gefällt und deren Fusspunkte a_0 und c_0 mit s verbunden, so ist in jedem der rechtwinkligen Dreiecke aa_0s und cc_0s , je die Hypotenuse und eine Kathete bekannt, die andere Kathete also konstruierbar; der Punkt s ergibt sich als Durchschnitt zweier mit den genannten zweiten Katheten als Halbmesser um die Punkte a_0 und c_0 beschriebenen Kreise.

Man erhält folgende

Konstruktion. Zuzufolge der Wahl der **Pr. Eb. E_2** sind, siehe Figur 24, die Senkrechten $\overline{a_2a_{02}}$ und $\overline{c_2c_{02}}$ auf die zweite Projektion von Ebene efs gleich die wahren Grössen der Katheten in oben genannten rechtwinkligen Dreiecken. Macht man da-

Figur 24.



her $\overline{a_2 s_{02}}$ und $\overline{c_2 s_{02}'}$ gleich den gegebenen Seitenkantenlängen $\overline{as}$ und $\overline{cs}$ und legt die Ebene efs in die **Pr. Eb.** E_1 um, so kommen die Punkte a_{02} und c_{02} nach a_0' und c_0' und die um a_0' und c_0' mit den Halbmessern gleich $\overline{a_{02} s_{02}}$ und $\overline{c_{02} s_{02}'}$ beschriebenen Kreise treffen sich in s' , der Umlegung von s , aus welcher sich s_1 und s_2 wie früher bestimmt.

Wie viele Lösungen der Aufgabe sind möglich?

Auflösung c. Es seien etwa die Winkel w_1 und w_1' der Seitenkanten $\overline{bs}$ und $\overline{es}$ gegeben. Durch diese beiden Winkel ist zugleich das Verhältnis der Entfernungen der Pyramidenspitze s und ihrer Projektion s_1 von den Ecken b

und c , ersteres gleich $\frac{1}{\sin w_1}$,

letzteres gleich $\frac{\text{ctg } w_1}{\text{ctg } w_1'}$, bekannt und damit

sowohl für die Spitze s als auch für deren erste Projektion s_1 , je ein geometrischer Ort, siehe Erkl. 175, I. Teil und Erkl. 36 bestimmt. Ausserdem besteht für die Entfernung des Punktes s von a ein zweiter geometrischer Ort in der um a als Mittelpunkt und $\overline{sa}$ als Halbmesser beschriebenen Kugel, siehe Erkl. 37.

Man erhält folgende

Konstruktion. Zeichne, siehe Figur 25, die beiden rechtwinkligen Dreiecke $s_1^0 s^0 b_1^0$ und $s_1^0 s^0 e_1^0$ mit gemeinsamer Kathete $\overline{s_1^0 s^0}$ von beliebiger Länge und den gegenüberliegenden Winkeln w_1 und w_1' und teile nunmehr die Strecke $\overline{b_1^0 e_1^0}$ in den Punkten p und q im Verhältnis $\frac{\overline{b_1^0 s_1^0}}{\overline{e_1^0 s_1^0}} = \frac{\text{ctg } w_1}{\text{ctg } w_1'}$, hierauf in den Punkten r und t in dem Verhältnis

$\frac{\overline{b_1^0 s^0}}{\overline{e_1^0 s^0}} = \frac{\sin w_1}{1}$ und beschreibe über den

Strecken $\overline{pq}$ und $\overline{rt}$ als Durchmesser die Kreise K' und K'' , ausserdem um a_1 mit der gegebenen Seitenkantenlänge $\overline{sa}$ den Kreis K''' .

Erkl. 36. Nach Erkl. 175, I. Teil, ist der Kreis K'' , siehe Figur 25, der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zweien Punkten r und t ein gegebenes Abstandsverhältnis besitzen. Denkt man sich nun den Kreis K'' um seinen Durchmesser $\overline{rt}$ so lange im Raume gedreht, bis der Kreis in seine Anfangslage zurückgekehrt ist, so bleibt derselbe in jeder Lage geometrischer Ort von eben genannter Art, daher ist auch die Gesamtheit aller Kreislagen ein solcher Ort. Diese Gesamtlagen aller Kreise bilden aber die Oberfläche einer Kugel, deren erste Projektion der Kreis K'' ist.

Erkl. 37. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Der geometrische Ort für alle Punkte im Raume, welche von einem gegebenen Punkte gegebene Entfernung besitzen, ist gebildet durch die Oberfläche einer Kugel, welche den gegebenen Punkt als Mittelpunkt, die gegebene Entfernung als Halbmesser besitzt.“

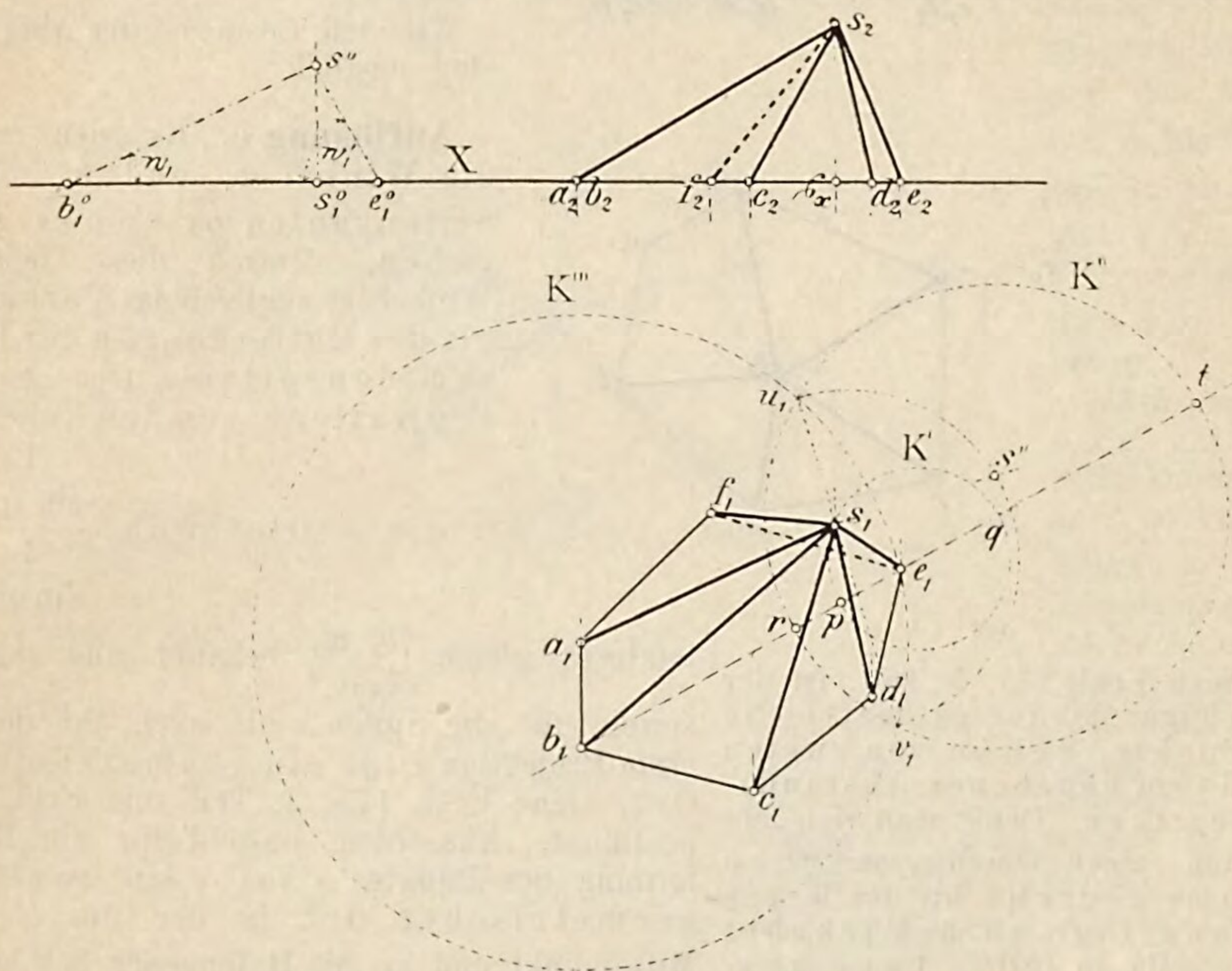
Erkl. 38. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Die Schnittlinie zweier Kugeln ist stets eine Kreislinie, deren Ebene auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kugeln senkrecht steht.“

Die Kreise K'' und K''' die Projektionen von Kugeln, letztere als geometrische Oerter des Punktes s , schneiden sich in zweien Punkten u_1 und v_1 , deren Verbindungslinie $u_1 v_1$ die erste Projektion des Schnittkreises der der genannten Kugeln darstellt, siehe Erkl. 38, $u_1 v_1$ schneidet den Kreis K' in der ersten Projektion s_1 der Pyramidenspitze. Die zweite Projektion bestimmt sich mit Hilfe der Länge as wie früher.

Wie viele Lösungen der Aufgabe sind möglich?

Figur 25.



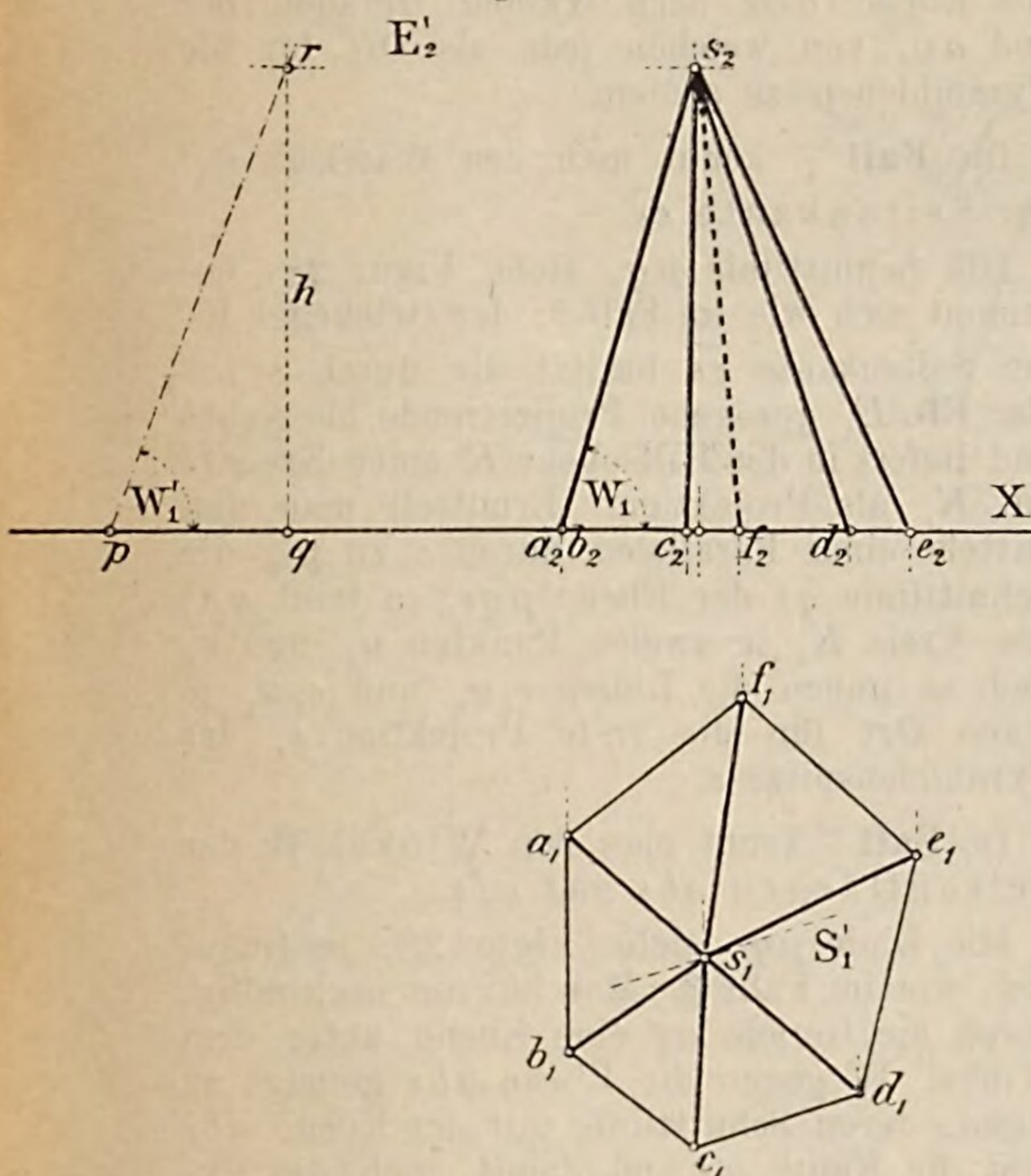
Auflösung d. Es seien gegeben die Winkel w_1, w_1', w_1'' der Seitenkanten as, cs und es mit der Grundfläche; hiedurch sind zugleich die Verhältnisse dieser Seitenkanten und deren Projektionen und somit nach Erkl. 36 sowohl für die Pyramidenspitze als auch deren erste Projektion je drei geometrische Oerter bekannt. Die Ausführung der Konstruktion vollzieht sich in ähnlicher Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe:

Man verschafft sich zunächst die Verhältnisse:

$$\frac{1}{\sin w_1}, \frac{1}{\sin w_1'}, \frac{1}{\sin w_1''} \text{ sowie } \frac{1}{\sin w_1'}, \frac{1}{\sin w_1''}, \frac{1}{\sin w_1''}$$

$$\frac{\text{ctg } w_1}{\text{ctg } w_1'}, \frac{\text{ctg } w_1}{\text{ctg } w_1''} \text{ endlich } \frac{\text{ctg } w_1'}{\text{ctg } w_1''}, \text{ teilt die}$$

Figur 26.



Strecken $a_1 c_1$, $a_1 e_1$ und $c_1 e_1$ nach den genannten Verhältnissen und bestimmt die zu den Teilpunkten gehörigen Ortskugeln bzw. Ortskreise. Die zu den letztgenannten Verhältnissen gehörigen Ortskreise haben die Projektion der Pyramidenspitze als gemeinsamen Punkt, während die zu den erstgenannten Verhältnissen gehörigen Ortskugeln den Abstand der Pyramidenspitze von der **Pr. Eb.** E_1 festlegen.

Wie viele Lösungen der Aufgabe sind möglich?

Auflösung e. Es seien gegeben die Winkel W_1 , W_1' und W_1'' der Seitenflächen abs , cds und efs mit der Grundfläche. Man hat nur nötig, durch die Geraden ab , cd und ef Ebenen unter den gegebenen Winkeln W_1 , W_1' und W_1'' bzw. zur **Pr. Eb.** E_1 geneigt, zu legen, so gehen deren Schnittlinien durch die Pyramidenspitze.

Wie viele Lösungen der Aufgabe gibt es?

Auflösung f. In allen Fällen α — δ seien gegeben die Winkel W_1 und W_1' der Seitenflächen abs und cds mit der Grundfläche.

Im **Fall α** kennt man ausserdem die Höhe h . Infolge der gegebenen Höhe h erhält man einen geometrischen Ort für die Pyramidenspitze in der im Abstande h zur **Pr. Eb.** E_1 gezogenen Parallelebene E' und es enthalten die Schnittlinien der zur **Pr. Eb.** E_1 unter den gegebenen Winkeln W_1 und W_1' geneigten und durch die Geraden ab und cd bzw. gelegten Ebenen die Pyramidenspitze.

Man erhält folgende

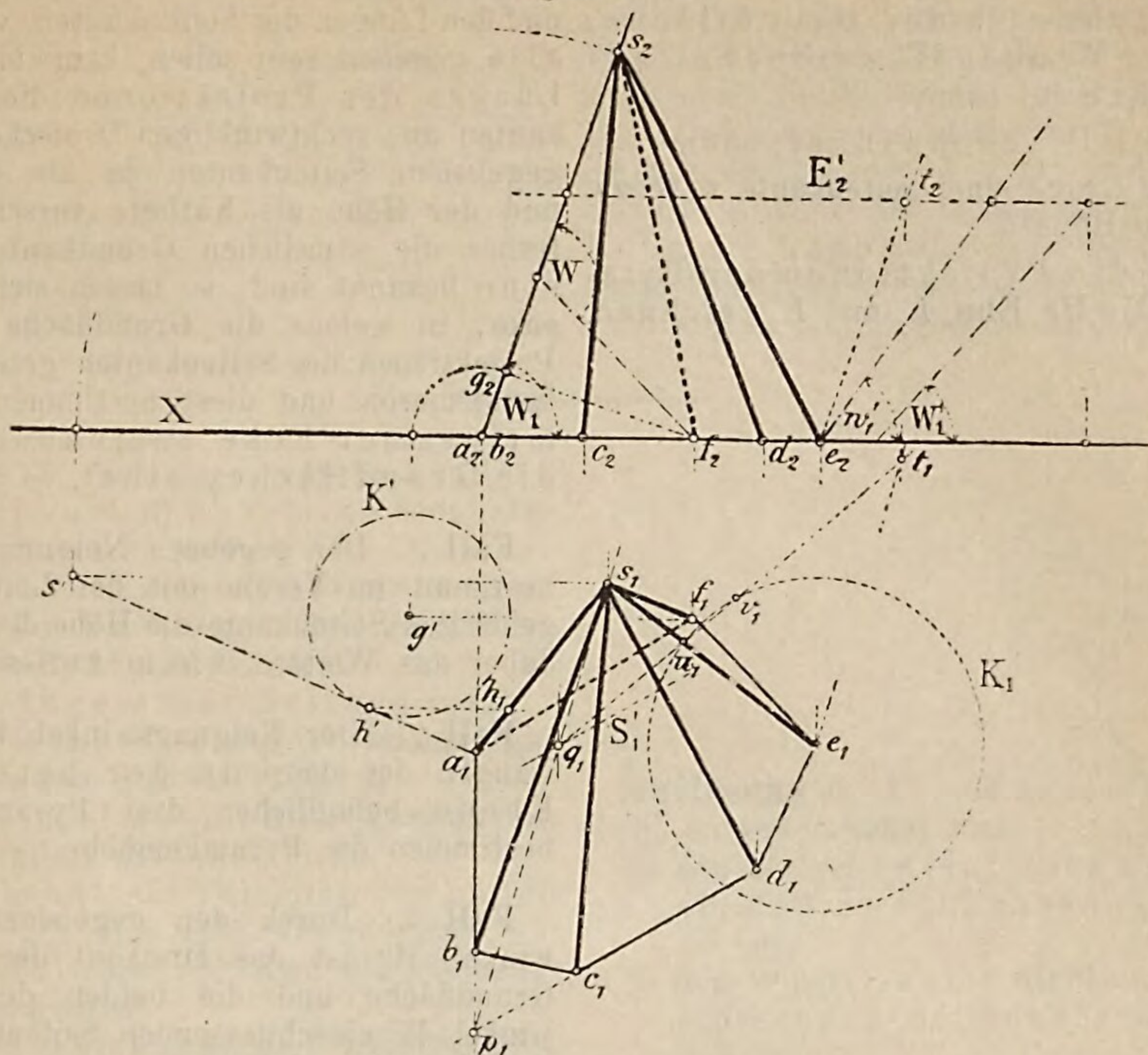
Konstruktion. Nehme, siehe Figur 26, E_2 senkrecht zu $a_1 b_1$ an und zeichne mittels W_1 die zweite Projektion der Seitenfläche abs , sodann die zweite Projektion E'_2 der Ebene E' im Abstande h parallel zur X -Achse. Konstruiert man nun das rechtwinklige Dreieck pqr mit dem Winkel W_1' und der gegenüberliegenden Kathete $= h$, so gibt die Strecke pq die Entfernung der ersten Projektion S_1' der zu cd parallelen Schnittlinie S' der Ebene cds mit der Ebene E' an. Die Parallele S_1' zu $c_1 d_1$ in einer Entfernung gleich pq von letzter Linie enthält somit die erste Projektion s_1 der Pyramidenspitze s .

Wie viele Lösungen der Aufgabe gibt es?

Im **Fall β** kennt man den Winkel w_1 der Seitenkante as .

Mittels der beiden Winkel W_1 und W_1' bestimmt sich die Schnittlinie pq der Ebenen abs und cds . Als geometrischen Ort für die

Figur 28.



Im Falle β kennt man die Winkel der Seitenkanten ds und fs mit der **Pr. Eb.** E_1 . Die Lösung ist ganz analog derjenigen von α , nur kennt man die Verhältnisse der Entfernungen der Punkte s und s_1 von den Punkten d und f .

Im Falle γ kennt man die Winkel W und W' der Seitenflächen asb und asf , sowie asb und bsc . Man hat nur nötig durch die beiden Geraden af und bc Ebenen unter den Winkeln W und W' zur Ebene abs geneigt zu legen, so enthalten die Schnittlinien dieser Ebenen mit der Ebene abs die Pyramidenspitze.

Im Falle δ kennt man die Winkel W und W' der Ebenen abs und asf , ebenso abs und csd . Das Lösungsverfahren ist das gleiche wie im Falle γ . Man legt durch die Geraden af und cd Ebenen unter den gegebenen Winkeln zu Ebene abs geneigt und bestimmt deren Schnittlinien mit letzterer.

Aufgabe 14. Von einer n seitigen Pyramide sind gegeben

a) $2n - 1$ Kanten, sowie

a) die Höhe h ,

β) der Winkel w_1 einer Seitenkante mit der Grundfläche,

- γ) der Winkel W_1 einer Seitenfläche mit der Grundfläche,
 δ) der Winkel W' zweier Seitenflächen, oder

b) $2n - 1$ Flächenwinkel, sowie

- α) die Länge einer Seitenkante z. B. $\overline{as}$,
 β) die Höhe h .

Man soll die Projektionen der Pyramide auf die Pr. Ebn. E_1 und E_2 zeichnen.

Auflösung a. Fall α. Mittels der Höhe h und den Längen der Seitenkanten, von welchen alle gegeben sein sollen, kann man sich die Längen der Projektionen dieser Seitenkanten aus rechtwinkligen Dreiecken mit den gegebenen Seitenkanten je als Hypotenuse und der Höhe als Kathete verschaffen. Da ferner die sämtlichen Grundkanten bis auf eine bekannt sind, so lassen sich die Dreiecke, in welche die Grundfläche durch die Projektionen der Seitenkanten geteilt werden, konstruieren und diese bestimmen mit gemeinsamer Ecke aneinander gelegt die Grundfläche selbst.

Fall β. Der gegebene Neigungswinkel w_1 bestimmt im Verein mit der Länge der zugehörigen Seitenkante die Höhe der Pyramide, daher das Weitere, wie in Auflösung a, α.

Fall γ. Der Neigungswinkel W_1 und die Längen der drei in der betreffenden Ebene befindlichen drei Pyramidenkanten bestimmen die Pyramidenhöhe.

Fall δ. Durch den gegebenen Flächenwinkel W' ist das Dreikant der durch die Grundfläche und die beiden den Flächenwinkel W einschliessenden Seitenflächen eingeschlossenen Dreikants bestimmt, wodurch sich die Pyramidenhöhe ergibt.

Auflösung b. Fall α. Je zwei Grundkanten z. B. $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$ bilden mit der durch den Schnittpunkt b gehenden Seitenkante bs ein Dreikant, von dem man die drei Flächenwinkel kennt. Dieses Dreikant lässt sich nach dem sechsten Dreikantsfall konstruieren und es bestimmen sich hieraus sowohl die Winkel der beiden Grundkanten $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$ als auch die Winkel der letzteren mit der Seitenkante $\overline{bs}$, endlich der Winkel von $\overline{bs}$ mit der Grundflächenebene. Mit Zuhilfenahme der übrigen von je zwei aneinanderstossenden Seitenflächen und der Grundfläche begrenzten Dreikante ergeben sich schliesslich alle Winkel zwischen Seiten- und Grundkanten; man hat nun in Rücksicht auf die eine bekannte Seitenkante zur Zeichnung der sämtlichen Seitenflächen für jedes Dreieck die nötigen Bestimmungsstücke, und findet damit zugleich die Längen der Grundkanten. Aus den Winkeln und den Längen der Grundkanten ergibt sich die Gestalt der Grundfläche. Kennt man aber sämtliche Begrenzungsflächen der Pyramide, so lassen sich deren Projektionen herstellen.

Fall β . Die im vorangehenden Falle α genannten Dreikante liefern wieder sowohl die Winkel der Seitenkanten mit den Grundkanten als die Winkel der letzteren selbst. Bestimmt man ausserdem den Winkel einer Seitenkante mit der Grundflächenebene, so kann man mittels der gegebenen Höhe die Länge der betreffenden Seitenkante konstruieren und hat hiedurch die Aufgabe auf die vorangehende zurückgeführt.

Aufgabe 15. Von einer regelmässigen n -seitigen ($n = 6$) Pyramide kennt man die Grundfläche, sowie

- den Winkel zweier Seitenkanten,
- den Winkel einer Seitenfläche mit der Grundfläche,
- die Länge einer Seitenkante,
- den Winkel zweier **zusammenstossenden** Seitenflächen,
- den Winkel zweier **nicht zusammenstossenden** Seitenflächen,
- das Verhältniss zwischen der Länge einer Seiten- und Grundkante,
- den Halbmesser der **einbeschriebenen** Kugel,
- den Halbmesser der **umbeschriebenen** Kugel.

Man soll die Projektionen der Pyramide auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 zeichnen.

Auflösung a. Es sind zwei Fälle möglich, entweder kennt man

- den Winkel zweier zusammenstossenden Seitenkanten etwa sa und sb oder
- den Winkel zweier **nicht** zusammenstossenden Seitenkanten etwa sa und sc .

Im Falle α ist die wahre Gestalt des Dreiecks abs und ausser dem seine Projektion gegeben, woraus sich die Höhe der Pyramide ermitteln lässt.

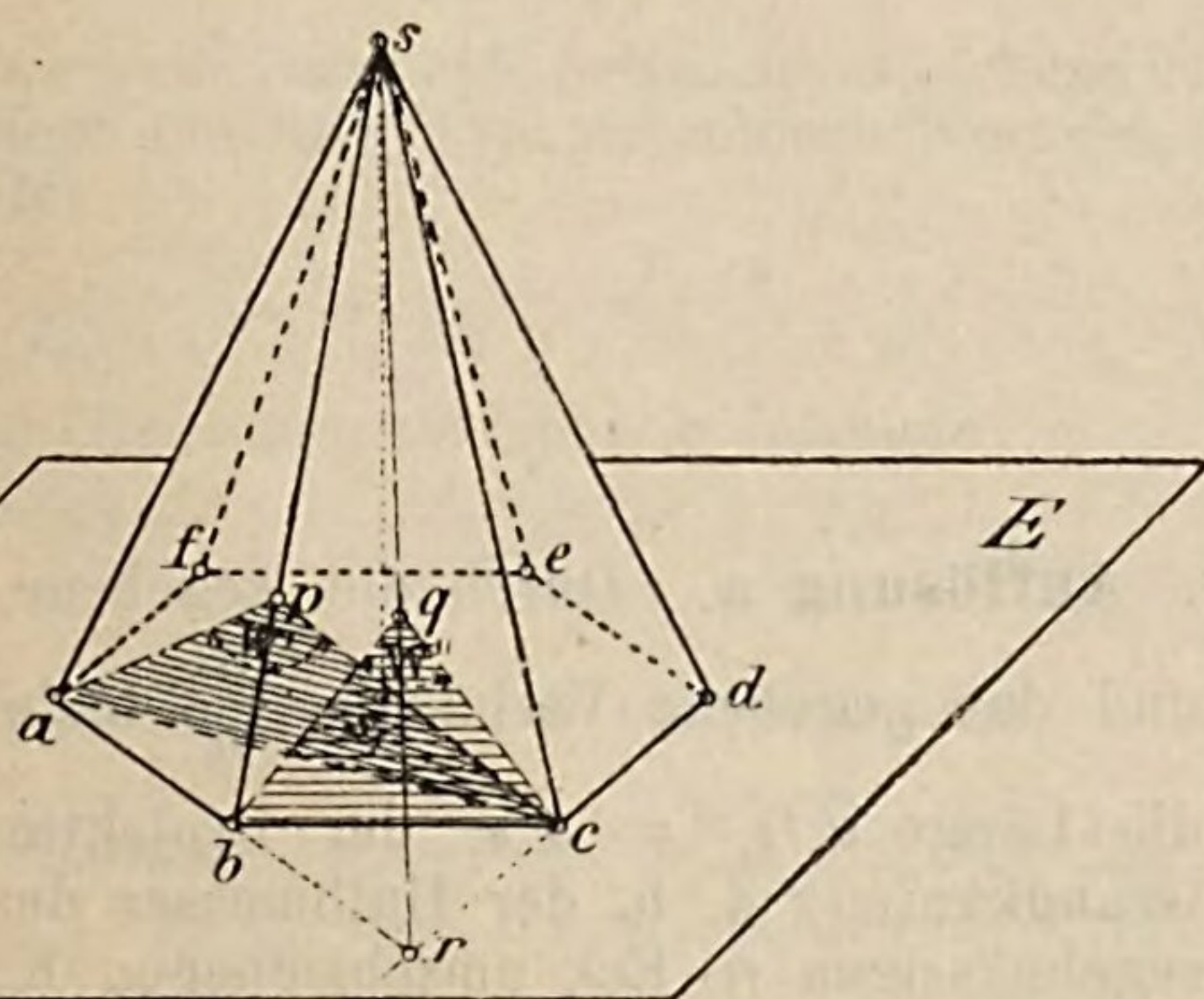
Im Falle β ist in gleicher Weise die Pyramide durch das Dreieck acs und seine Projektion $a_1s_1c_1$ bestimmt.

Auflösung b. Mittels des Winkels W_1 und der Projektion s_1 der Pyramidenspitze ist die Pyramidenspitze bestimmbar.

Auflösung c. Die Pyramidenhöhe bestimmt sich aus der Länge der gegebenen Seite und jener ihrer Projektion.

Auflösung d. Ist, siehe Figur 29, etwa der Winkel W' der beiden Seitenflächen abs und cbs gegeben, so denke man sich von a und c Senkrechte auf die Kante bs gezogen, so schliessen dieselben den Winkel W' ein. Mittels des Winkels W' kennt man nun das gleichschenklige Dreieck apc , seiner Grösse nach, folglich auch die Seite ap , welche zugleich dem rechtwinkligen Dreieck abp angehört. Legt man nun dieses Dreieck um die Kante $\overline{ab}$ in die **Pr. Eb.** E_1 um, so erhält man aus der Umlegung p' des Punktes p zunächst die Projektion p_1 auf $p_1b_1s_1$ und hiedurch auch die zweite Projektion von p , womit auch die zweite Projektion s_2 bestimmt ist.

Figur 29.



Auflösung e. Ist, siehe Figur 29, etwa der Winkel W'' der beiden Seitenflächen abs und cds gegeben, so ist zunächst wieder in dem Dreieck bcq bei q der Winkel W'' enthalten und dasselbe seiner Grösse nach konstruierbar, wodurch man in dem rechtwinkligen Dreieck bqr Hypotenuse und Kathete kennt. Die Umlegung dieses Dreiecks lässt sich so nach herstellen, womit die Projektion q_1 von q auf r_1s_1 und hieraus auch die zweite Projektion q_2 sich ergibt.

Auflösung f. Mittels des gegebenen Verhältnisses $\frac{m}{n}$ zwischen den Längen einer Seiten- und Grundkante gewinnt man die Pyramidenhöhe; denn zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse gleich m und einer Kathete gleich n , sowie ein zweites diesem Dreiecke ähnliches Dreieck mit der einen der Strecken entsprechenden Kathete, so ist die andere Kathete gleich der Pyramidenhöhe.

Auflösung g. Ist m_2 , siehe Figur 30, die zweite Projektion des Mittelpunktes der eingeschriebenen Kugel, so kennt man in dem Dreieck $a_2s_xm_2$ die beiden Katheten; es liegt demnach s_2 auf der Tangente durch a_2 an den Kreis K_2 .

Auflösung h. Ist m_2' , siehe Figur 30, die zweite Projektion des Mittelpunktes der umbeschriebenen Kugel, so kennt man in dem rechtwinkligen Dreieck $a_2's_xm_2'$ die Hypotenuse $\overline{a_2m_2'}$ gleich dem gegebenen Halbmesser und der Kathete $\overline{a_2's_x} = \overline{a_1s_1}$. Die Pyramidenspitze ergibt sich dann aus der Beziehung $\overline{m_2's_2} = \overline{m_2'a_2'}$.

Aufgabe 16. Von einer n seitigen regelmässigen Pyramide kennt man

- die Höhe und das Verhältnis $\frac{m}{n}$ zwischen den Längen einer Seiten- und Grundkante,
- die Höhe und den Winkel zweier aufeinander folgenden Seitenkanten,
- die Höhe und den Winkel zweier aufeinander folgenden Seitenflächen,
- den Halbmesser der ein- und jener der umbeschriebenen Kugel.

Man soll die Projektionen der Pyramide auf die Pr. Ebn. E_1 und E_2 zeichnen.

Auflösung a. Durch die gegebene Höhe und das gegebene Verhältnis $\frac{m}{n}$ findet sich die Länge $\overline{a_1's_1'} = \overline{a_1s_1}$ der Projektion der Grundkanten, d. h. der Halbmesser des dem regelmässigen n -Eck umschriebenen Kreises.

Auflösung b. Zeichnet man ein regelmässiges n -Eck von der verlangten Seitenzahl und nimmt dasselbe als Grundfläche einer der gesuchten Pyramide ähnlichen Pyramide, so

In Rücksicht auf Gleichheit 21 erhält man nun folgende Gleichheit:

$$R^2 - (r + z)^2 = \frac{r^2 \cdot (R + r + z)}{p^2 \cdot (R + z - r)}$$

oder:

$$(R + r + z) \cdot (R - r - z) = \frac{r^2 \cdot (R + r + z)}{p^2 \cdot (R + z - r)}$$

$$(R - r - z) \cdot (R - r + z) \cdot p^2 = r^2$$

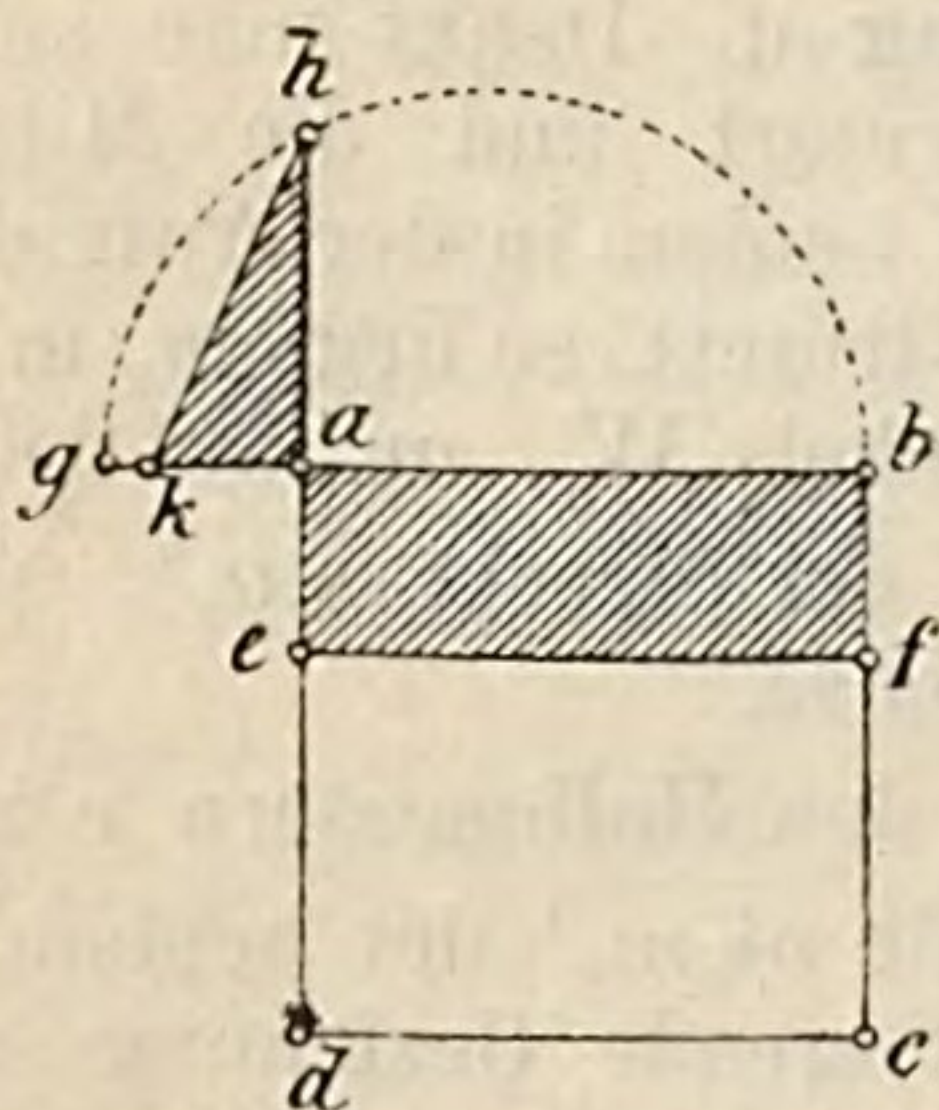
$$R^2 - R \cdot r - R \cdot z - R \cdot r + r^2 + rz + Rz - rz - z^2$$

$$((R - r)^2 - z^2) \cdot p^2 = r^2$$

$$z = \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{p^2}}$$

welcher Ausdruck mit den in Lösung d unter 20) genannten übereinstimmt.

Figur 31.



Erkl. 40. Jeder Ausdruck von der Form $a^2 - b^2$ lässt sich stets auf die Form bringen: $(a + b) \cdot (a - b)$, denn führt man in letzterem Ausdrucke die angedeutete Multiplikation durch, so erhält man:

$$a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Erkl. 41. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gehörige Höhe teilt erstere in zwei Abschnitte, welche ein Rechteck bestimmen, dessen Inhalt dem Inhalte des über der Höhe errichteten Quadrates gleich ist.“

Es ist:

$$y^2 - \frac{y^2}{4} = x^2$$

$$p^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{3}{4}.$$

Für die Strecke $m_2 m_2'$ erhält man somit die Beziehung:

$$m_2 m_2' = \sqrt{(R - r)^2 - \frac{4 \cdot r^2}{3}}$$

d. h. als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $R - r$ und der andern Kathete $\frac{2r}{\sqrt{3}}$. Letzterer Ausdruck lässt sich

aber, siehe Figur 31, wie folgt darstellen:

Beschreibt man über der Strecke $ab = 2 \cdot r$ das Quadrat $abcd$ und das Rechteck $abef$ als den dritten Teil von $abcd$, macht $ag = ae$ und zeichnet über bg den Halbkreis, so gibt die zur Hypotenuse gb gehörige Höhe ah in dem rechtwinkligen Dreieck ghb den Wert $\frac{2r}{\sqrt{3}}$

siehe Erkl. 41. Mittels des rechtwinkligen Dreiecks ahk , in welchem die Hypotenuse $hk = (R - r)$ zu machen ist, erhält man in der zweiten Kathete ak die Strecke $m_2 m_2'$ gleich der Entfernung der Mittelpunkte der in der Aufgabe genannten Kugeln.

d) Ungelöste Aufgaben über die Pyramide.

Aufgabe 17. Von einer dreiseitigen Pyramide sind gegeben

- die Längen der sechs Kanten,
- die Längen der drei Grundkanten, sowie
- die Längen zweier Seitenkanten und der Winkel einer derselben mit der Grundfläche,

- β) die Längen zweier Seitenkanten und der Winkel einer Seitenfläche mit der Grundfläche,
- γ) die Längen zweier Seitenkanten und der Halbmesser der umbeschriebenen Kugel,
- δ) die Länge einer Seitenkante und die Winkel zweier Seitenflächen mit der Grundfläche,
- ε) die Länge einer Seitenkante, der Halbmesser der umbeschriebenen Kugel und die Höhe,
- ζ) die Länge einer Seitenkante und die Winkel zweier Seitenflächen mit der Grundfläche,
- η) die Winkel der drei Seitenflächen mit der Grundfläche,
- θ) der Halbmesser der umbeschriebenen Kugel, die Höhe und der Neigungswinkel einer Seitenkante mit der Grundfläche,
- ι) der Halbmesser der umbeschriebenen Kugel, die Höhe und der Neigungswinkel einer Seitenfläche mit der Grundfläche.

Man soll die Projektionen der Pyramide auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 zeichnen.

Aufgabe 18. Von einer regelmässigen dreiseitigen Pyramide kennt man

- a) die Länge einer Kante,
- b) den Halbmesser der umbeschriebenen Kugel,
- c) den Halbmesser der einbeschriebenen Kugel,
- d) die Höhe.

Man soll die Projektionen der Pyramide auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 zeichnen.

Aufgabe 19. Von einer vierseitigen Pyramide kennt man die Grundfläche, sowie

- a) **eine Seitenfläche** abs , ausserdem ist gegeben
 - α) der Winkel **einer** der übrigen Seitenflächen mit der Grundfläche,
 - β) der Winkel einer der beiden Seitenkanten as oder bs mit der Grundfläche,
 - γ) der Winkel **einer** der **nicht** zur Seitenfläche abs gehörigen Seitenkanten mit der Grundfläche,
 - δ) der **Winkel der gegebenen Seitenfläche** mit **einer** der übrigen Seitenflächen,
 - ε) die Höhe;

- b) **der Winkel der Seitenfläche abs mit der Grundfläche, sowie die Höhe**, ausserdem ist gegeben
- α) die **Länge** einer Seitenkante,
 - β) der **Winkel** einer Seitenkante mit der Grundfläche,
 - γ) der Winkel der gegebenen Seitenfläche mit einer der übrigen Seitenflächen;
- c) **der Winkel zweier Seitenflächen mit der Grundfläche** und ausserdem
- α) die Höhe,
 - β) die **Länge** einer Seitenkante,
 - γ) der **Winkel** einer Seitenkante mit der Grundfläche,
 - δ) das **Verhältnis** der Längen zweier Seitenkanten;
- d) die **Winkel** dreier Seitenflächen mit der Grundfläche.
-

Aufgabe 20. Von einer vierseitigen Pyramide kennt man

- a) **zwei zusammenstossende Seitenflächen abs und bcs , sowie ihren Neigungswinkel**, ausserdem
- α) die **Winkel** der beiden übrigen Seitenflächen mit der Grundfläche,
 - β) die **Länge** der Seitenkante $\overline{ds}$ und den Winkel einer der die Kante $\overline{ds}$ enthaltenden Seitenflächen mit der Grundfläche,
 - γ) das Verhältnis der Längen der Grundkanten $\overline{ad}$ und $\overline{cd}$;
- b) **zwei zusammenstossende Seitenflächen abs und bcs , sowie die Höhe**, ausserdem
- α) die Winkel der Seitenflächen längs der Kanten $\overline{as}$ und $\overline{cs}$.
 - β) den Winkel der Seitenflächen längs der Kante $\overline{as}$ und den Winkel der Seitenfläche $\overline{cds}$ mit der Grundfläche;
- c) **zwei nicht zusammenstossende Seitenflächen, sowie den Winkel der beiden übrigen Seitenflächen mit der Grundfläche**, ausserdem
- α) die Höhe,
 - β) den Winkel einer der Seitenkanten mit der Grundfläche,
 - γ) den Winkel einer der gegebenen Seitenflächen mit der Grundfläche;

- d) **drei Seitenflächen**, ausserdem
- α) die Höhe,
 - β) den Winkel einer Seitenfläche mit der Grundfläche,
 - γ) den Winkel einer Seitenkante mit der Grundfläche,
 - δ) den Winkel zweier Seitenflächen.

e) Gelöste Aufgaben über das Prisma.

Aufgabe 21. Von einem n -seitigen Prisma, siehe Figur 32, kennt man **eine Grundfläche** $abcde$, **eine Seitenfläche** $abab$, sowie

- a) **den Winkel W_1' der gegebenen Seitenfläche $abab$ mit der Grundfläche**, ausserdem

- α) die Länge einer der übrigen Seitenkanten, z. B. $\overline{dd}$,
- β) den Winkel W_1 beider Grundflächen,
- γ) den Winkel w' einer der übrigen Grundkanten, z. B. ae der Deckfläche, siehe Erkl. 41a, mit der Grundfläche,
- δ) den Winkel W' der Deckfläche mit der gegebenen Seitenfläche,
- ϵ) die Entfernung d eines Eckpunktes, z. B. d der Deckfläche von der Grundfläche;

- b) **den Winkel w_1 einer Seitenkante mit der gegebenen Grundfläche**, sowie die im Falle a unter α bis ϵ genannten Stücke;

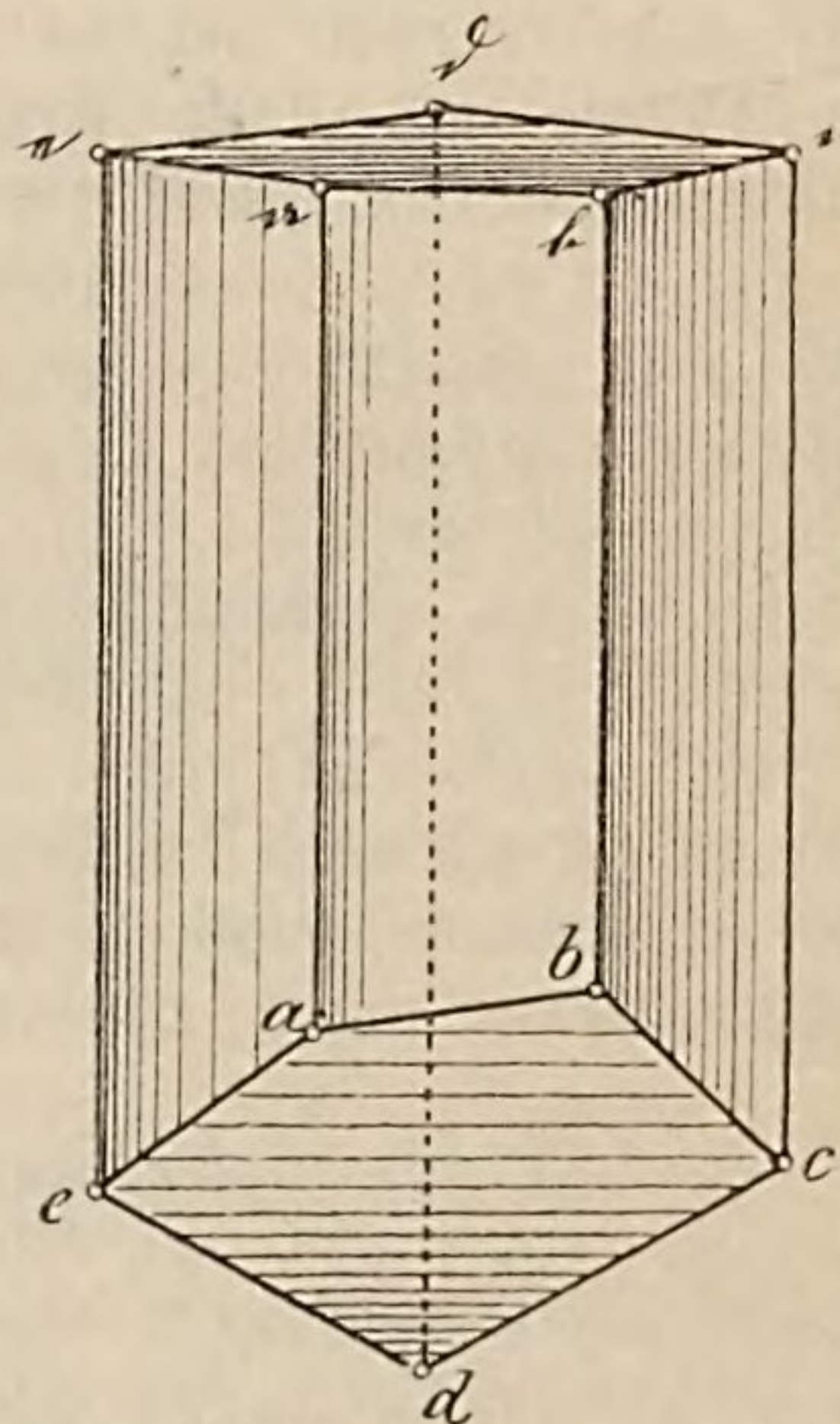
- c) **die Winkel w_1 und w_1' einer Seitenkante mit den beiden Grundflächen**;

- d) **die Winkel W_1'' und W_1''' zweier nicht gegebenen Seitenflächen**, etwa $aeaa$ und $cdcc$ mit der gegebenen Grundfläche.

Erkl. 41a. Die zweite Grundfläche eines Prismas soll für die Folge kurz als Deckfläche bezeichnet werden, in der Figur 32 versteht man also unter der Deckfläche die Fläche $abcde$.

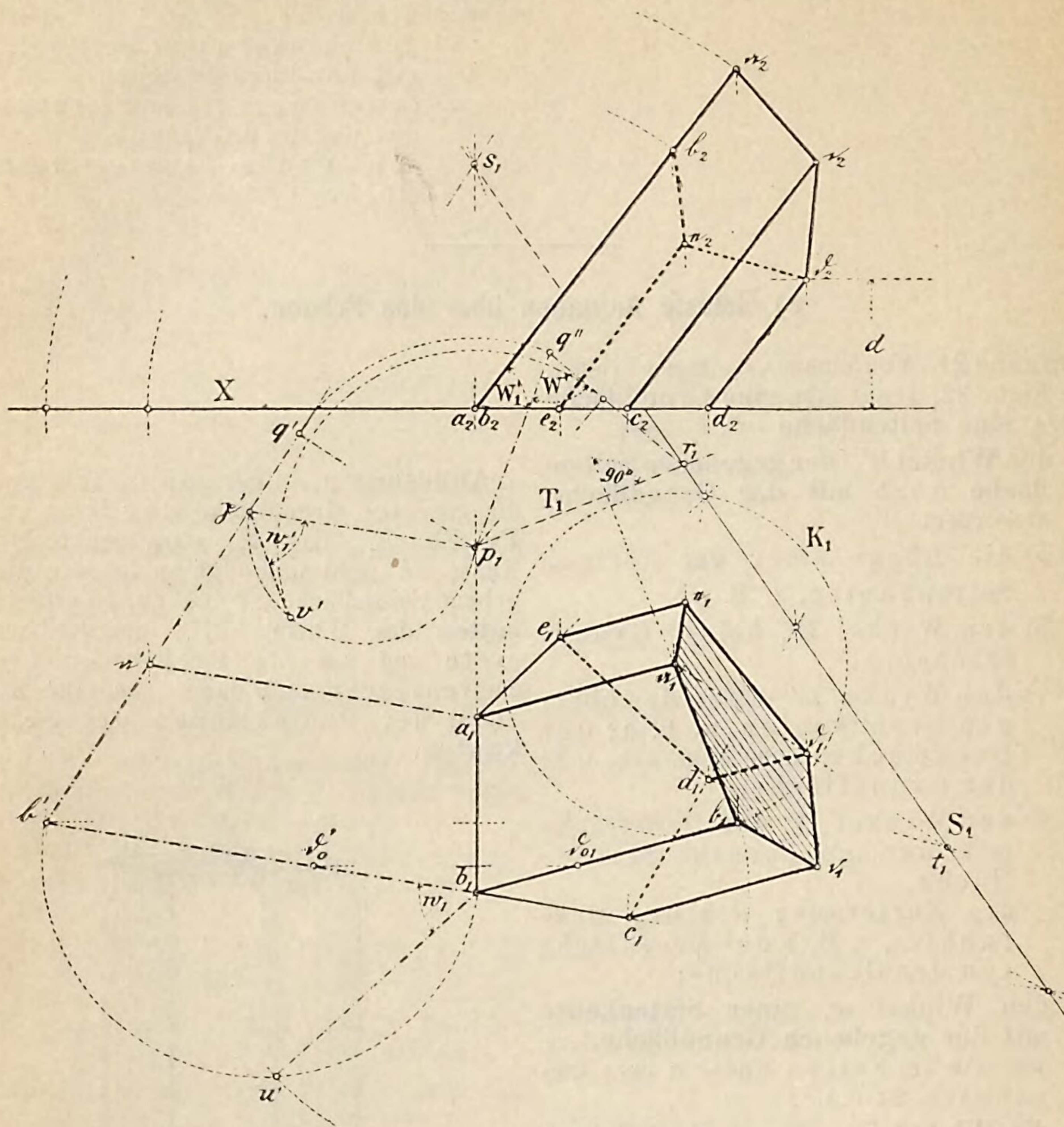
Auflösung a. Legt man, siehe Figur 33, die gegebene Grundfläche $abcde$ so in die **Pr. Eb. E_1** , dass E_2 etwa senkrecht zur Kante ab steht und fügt an letztere die gegebene Seitenfläche $a_1b_1b'a'$ an, so erhält man mittels des Winkels W_1' unmittelbar die erste und zweite Projektion dieser Seitenfläche und damit auch die Richtung der Projektionen der Seitenkanten.

Figur 32.



Im **Fall α** findet man nunmehr mittels der gegebenen Länge $\overline{dd}$ auch die Länge der Projektion $\overline{d_1d_1}$. Man darf ja nur etwa die Strecke $\overline{b_1d_1}$ gleich der gegebenen Länge $\overline{dd}$ abtragen und die Projektion d_{01} auf b_1b_1 bestimmen. $\overline{d_1d_1}$ ist dann gleich $\overline{b_1d_{01}}$. Nunmehr kann aber die Spur S_1 als Verbindungslinie s_1t_1 der Schnittpunkte s_1 von a_1b_1 und a_1d_1 und t_1 von a_1d_1 und a_1b_1 der Deckfläche ermittelt werden, wodurch sich die Projektion der Deckfläche als **affine** Figur der Grundfläche ergibt.

Figur 33.



Im **Fall β** gewinnt man die Spur S_1 durch Lösung der Aufgabe: durch die Gerade ab ist eine Ebene unter dem Winkel W_1 gegen die **Pr. Eb. E_1** geneigt zu legen, siehe Aufgabe 19, I. Teil. Das Weitere vollzieht sich wie im Fall α .

Im **Fall γ** erhält man mittels des Winkels w' den Ortskreis K_1 für die erste Spur der Geraden ae , welche ausserdem noch auf der verlängerten Grundkante a_1e_1 liegt. Ein zweiter Punkt der Spur S_1 ist der Punkt s_1 .

Im **Fall δ** lässt sich der gegebene Winkel W' zur Bestimmung der Spur S_1 der Deckebene am einfachsten wie folgt verwenden. Eine durch den beliebig auf ab gewählten Punkt p zur Kante ab senkrecht geführte Ebene hat als erste Spur die Gerade T_1 senkrecht zu a_1b_1 , und schneidet die

gegebene Seitenfläche $abab$ nach einer Geraden pq , deren Umlegung p_1q' senkrecht zu $a'b'$ steht. Konstruiert man nun das Dreieck $p_1q''r_1$ so, dass die Seite p_1r_1 auf T_1 , eine Ecke q'' auf a_1b_1 fällt, ausserdem $p_1q'' = p_1q'$ und der Winkel bei q'' gleich W' ist, so geht durch die dritte Ecke r_1 dieses Dreiecks die Spur S_1 der Deckebene des Prismas.

Im Fall ε liefert eine Parallele zu X im gegebenen Abstände d von letzterer Linie die zweite Projektion b_2 von b , wodurch auch b_1 bestimmt ist. Die Spur S_1 ergibt sich demnach wie im Fall α .

Auflösung b. Mittels des gegebenen Winkels w_1 und der wahren Länge b_1b' der Seitenkante $\overline{bb}$ ergibt sich sowohl die Länge der Projektion b_1b_1 als auch der Abstand des Punktes b von der Pr. Eb. E_1 . Konstruiert man nämlich ein rechtwinkliges Dreieck $b_1b'u'$ mit der Länge b_1b' als Hypotenuse und dem Winkel w_1 , so gibt die dem Winkel w_1 anliegende Kathete b_1u' die Länge der Projektion b_1b_1 . Der Punkt b_1 liegt somit im Schnittpunkt der von b' auf a_1b_1 gefällten Senkrechten mit dem um b_1 mit b_1u' als Halbmesser beschriebenen Kreise. Ist aber b_1 bestimmt, so ist dadurch der Winkel W_1 und hiedurch auch der Punkt a gegeben. Alles Weitere bleibt wie in den Fällen α bis ε der Auflösung a.

Auflösung c. Mittels des Winkels w_1 bestimmen sich die Punkte a und b der Deckfläche wie in Auflösung b; ausserdem kennt man mit Zuhilfenahme des Winkels w_1' die Entfernungen der Punkte b und a von der Deckfläche. Man hat daher nur durch die Gerade ab eine Ebene zu legen, welche von dem Punkt a , bzw. b eine gegebene Entfernung besitzt, siehe auch Aufgabe 116 a, I. Teil.

Die Konstruktion der Spur S_1 der Deckebene erhellt aus Figur 33. Es ist auf a_1b_1 ein beliebiger Punkt p_1 angenommen, durch denselben die Parallele p_1p' zu a_1a' gezogen und über p_1p' als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck $p_1p'v'$ mit dem Winkel w_1' konstruiert; die Kathete p_1v' gibt die Entfernung der Deckebene von dem Punkte p an. Denkt man sich nun durch p_1 eine Ebene E' senkrecht zu ab gezogen und ihren Schnitt q mit ab aufgesucht, so kommt die Umlegung dieses Schnittes auf a_1b_1 nach q'' zu liegen, so dass $p_1q' = p_1q''$ ist (p_1q' steht senkrecht auf $a'b'$), siehe auch Auflösung a im Fall δ . Die von q'' an den um p_1 als Mittelpunkt mit einem Halbmesser gleich p_1v' beschriebenen Kreis gezogene Tangente stellt die

umgelegte Schnittlinie der Ebene E' mit der Deckebene dar und liefert auf T_1 einen Punkt r_1 der Spur S_1 der letzteren.

Auflösung d. Legt man durch die Grundkanten ae und cd unter den gegebenen Winkeln W_1'' und W_1''' mit der **Pr. Eb.** E_1 zwei Ebenen, so ist durch deren Schnittlinie die Richtung der Seitenkanten des Prismas bestimmt. Hat man aber diese ermittelt, so bestimmen sich mittels der Umlegung der gegebenen Seitenfläche die Projektionen der Punkte a und b . Mit Zuhilfenahme des Winkels W_1'' ermittelt sich zunächst der Eckpunkt e , womit die Deckfläche, da man von ihr nunmehr drei Punkte, nämlich a , b und e kennt, gezeichnet werden kann.

Anmerkung 6. In allen den vorgeführten Fällen der Aufgabe 21 ist stets die Zahl der möglichen Lösungen zu ermitteln, und ausserdem Rücksicht zu nehmen auf die etwa auftretenden Genauigkeitsproben und Konstruktionsvereinfachungen durch Benützung der Affinitätsbeziehung zwischen den beiden Grundflächen.

Aufgabe 22. Von einem n -seitigen Prisma kennt man eine **Grundfläche**, sowie

a) die **Längen dreier Seitenkanten** etwa $\overline{aa}$, $\overline{cc}$ und $\overline{ee}$, ausserdem

α) den Winkel w_1 der Seitenkanten mit der gegebenen Grundfläche, sowie den Winkel W_1 beider Grundflächen,

β) den Winkel w_1 wie im Falle α , sowie den Winkel W_1' einer Seitenfläche mit der Grundfläche,

γ) den Winkel W_1 beider Grundflächen, sowie den Winkel W_1' einer Seitenfläche etwa $\overline{eded}$ mit der Grundfläche,

δ) die Winkel w_1 und w_1' einer Seitenkante mit beiden Grundflächen,

ϵ) die Winkel W' und W'' dreier aufeinanderfolgenden Seitenflächen;

b) die **Längen zweier Seitenkanten**, sowie die Winkel w_1 , w_1' und W_1 .

c) die **Länge einer Seitenkante** etwa $\overline{aa}$, die Winkel w_1 , w_1' und W_1 und

α) den Winkel W_1' einer Seitenfläche etwa $\overline{abba}$ mit der gegebenen Grundfläche,

β) den Winkel einer Seitenfläche mit der nicht gegebenen Grundfläche,

γ) den Winkel W zweier Seitenflächen.

Auflösung a. Denkt man sich das Prisma konstruiert, siehe Figur 34, so finden, wenn die durch a , c und e gehenden Seitenkanten als gegeben vorausgesetzt und die Schnittpunkte u_1 und v_1 der Verbindungslinien a_1c_1 und a_1e_1 , ebenso c_1e_1 und c_1a_1 mit der ersten Spur S_1 der Deckfläche bestimmt werden, folgende Verhältnissgleichheiten statt:

$$\frac{\overline{a_1a_1}}{\overline{c_1c_1}} = \frac{\overline{aa}}{\overline{cc}} = \frac{\overline{u_1a_1}}{\overline{u_1c_1}},$$

ebenso:

$$\frac{\overline{c_1c_1}}{\overline{e_1e_1}} = \frac{\overline{cc}}{\overline{ee}} = \frac{\overline{v_1c_1}}{\overline{v_1e_1}}.$$

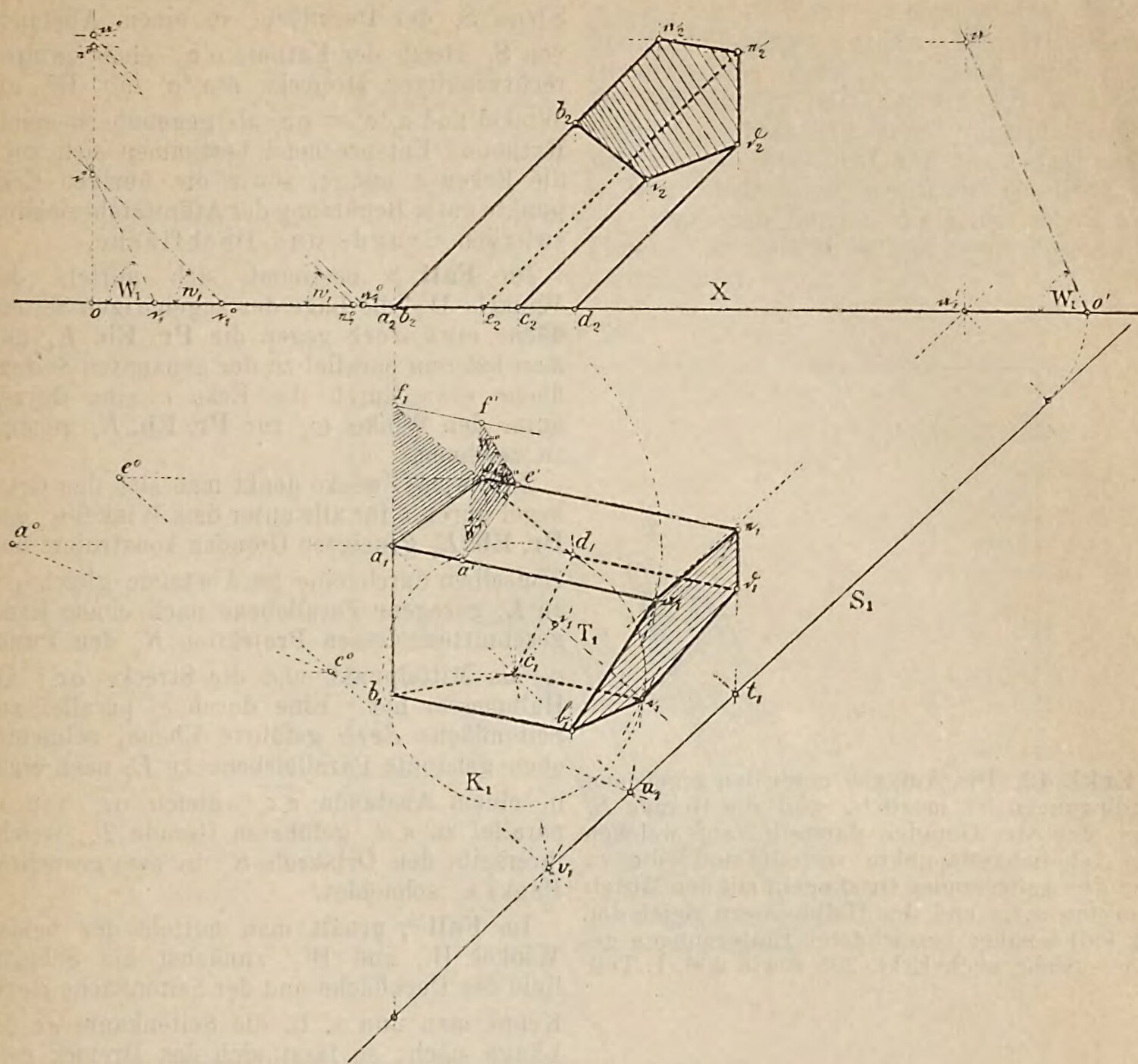
Weil nun die Längen $\overline{aa}$, $\overline{cc}$ und $\overline{ee}$ bekannt sind, so ist das gleiche der Fall bezüglich

der Verhältnisse $\frac{\overline{u_1a_1}}{\overline{u_1c_1}}$ und $\frac{\overline{v_1c_1}}{\overline{v_1e_1}}$, d. h.

man erhält die Punkte u_1 und v_1 der Spur S_1 der Deckfläche durch Teilung der Verbindungslinien jener Ecken der Grundfläche, durch welche die gegebenen Seitenkanten gehen, in den oben genannten Verhältnissen.

Durch die Längen von dreien Seitenkanten ist also stets die Lage der Spur S_1 der Deckfläche bestimmt.

Figur 34.



Im **Fall** α ist nun noch mittels des Winkels W_1 auch die Lage der Deckfläche gegen die **Pr. Eb.** E_1 (gegebene Grundfläche) vollständig bestimmt und man findet überdies mittels der gegebenen Längen $\overline{aa'}$, $\overline{cc'}$ und $\overline{ee'}$ und des Winkels w_1 sowohl die Längen der ersten Projektionen der gegebenen Seitenkanten als auch die Abstände ihrer zweiten Endpunkte von der **Pr. Eb.** E_1 .

Man erhält folgende

Konstruktion. Zeichne, siehe Figur 34, die rechtwinkligen Dreiecke $oa_0a_1^0$, $oc_0c_1^0$, $oe_0e_1^0$ mit den gegebenen Längen als Hypotenusen und dem Winkel w_1 , so geben die dem Winkel w_1 anliegenden Katheten die Längen der ersten Projektionen, die gegenüberliegenden Katheten aber die Abstände der zweiten Endpunkte der gegebenen Seitenkanten von der **Pr. Eb.** E_1 an. Der Punkt a_1 liegt nun einerseits auf einem Kreise um a_1 als Mittelpunkt und einem Halbmesser gleich der Kathete

$\overline{o a_1^0}$, andererseits in einer Parallelen zur Spur S_1 der Deckfläche in einem Abstände von S_1 gleich der Kathete $\overline{o' a_1'}$ eines zweiten rechtwinkligen Dreiecks $\overline{o' a_1' a'}$ mit W_1 als Winkel und $\overline{a_1' a'} = \overline{o a^0}$ als gegenüberliegende Kathete. Entsprechend bestimmen sich auch die Ecken c und e , sowie die übrigen Eckpunkte unter Benützung der Affinitätsbeziehung zwischen Grund- und Deckfläche.

Im **Fall β** bestimmt sich mittels des Winkels W_1' die Lage der zugehörigen Seitenfläche etwa $d e e d$ gegen die **Pr. Eb.** E_1 und man hat nun parallel zu der genannten Seitenfläche etwa durch die Ecke c eine Gerade unter den Winkel w_1 zur **Pr. Eb.** E_1 geneigt zu zeichnen.

Zu diesem Zwecke denkt man sich den Ortskegel durch c für alle unter dem Winkel w_1 zur **Pr. Eb.** E_1 geneigten Geraden konstruiert und demselben durch eine im Abstände gleich $\overline{o c^0}$ zu E_1 gezogene Parallelebene nach einem Kreis geschnitten, dessen Projektion K_1 den Punkt c_1 als Mittelpunkt und die Strecke $\overline{o c_1^0}$ als Halbmesser hat. Eine durch c_1 parallel zur Seitenfläche $d e e d$ geführte Ebene, schneidet oben genannte Parallelebene zu E_1 nach einer in einem Abstände $\overline{c_1 c_1'}$ gleich $\overline{o c_1}$ von c_1 parallel zu $e_1 d_1$ geführten Gerade T_1 , welche ihrerseits den Ortskreis K_1 in dem gesuchten Punkt c_1 schneidet.

Im **Fall γ** erhält man mittels der beiden Winkel W_1 und W_1' zunächst die Schnittlinie der Deckfläche und der Seitenfläche $d e e d$. Kennt man nun z. B. die Seitenkante $\overline{e e}$ der Länge nach, so lässt sich das Dreieck $e t_1 e$, siehe Figur 34, in der Umlegung um die Spur $e_1 t_1$ seiner Ebene, in wahrer Gestalt zeichnen und aus letzterer seine erste Projektion $c_1 t_1 e_1$, d. h. die erste Projektion e_1 von e ermitteln. Damit ist aber die Deckfläche vollständig bestimmt.

Im **Fall δ** . Die Deckfläche hat von den Punkten a , c und e bekannte Entfernungen, nämlich gleich den gegenüberliegenden Katheten von rechtwinkligen Dreiecken mit den Hypotenusen gleich den gegebenen Seitenkanten und dem Winkel w_1' . Man hat somit durch die Gerade S_1 eine Ebene zu legen, welche von den drei Punkten a , c und e die genannten Entfernungen besitzt, siehe Aufgabe 118a I. Teil und Erkl. 42.

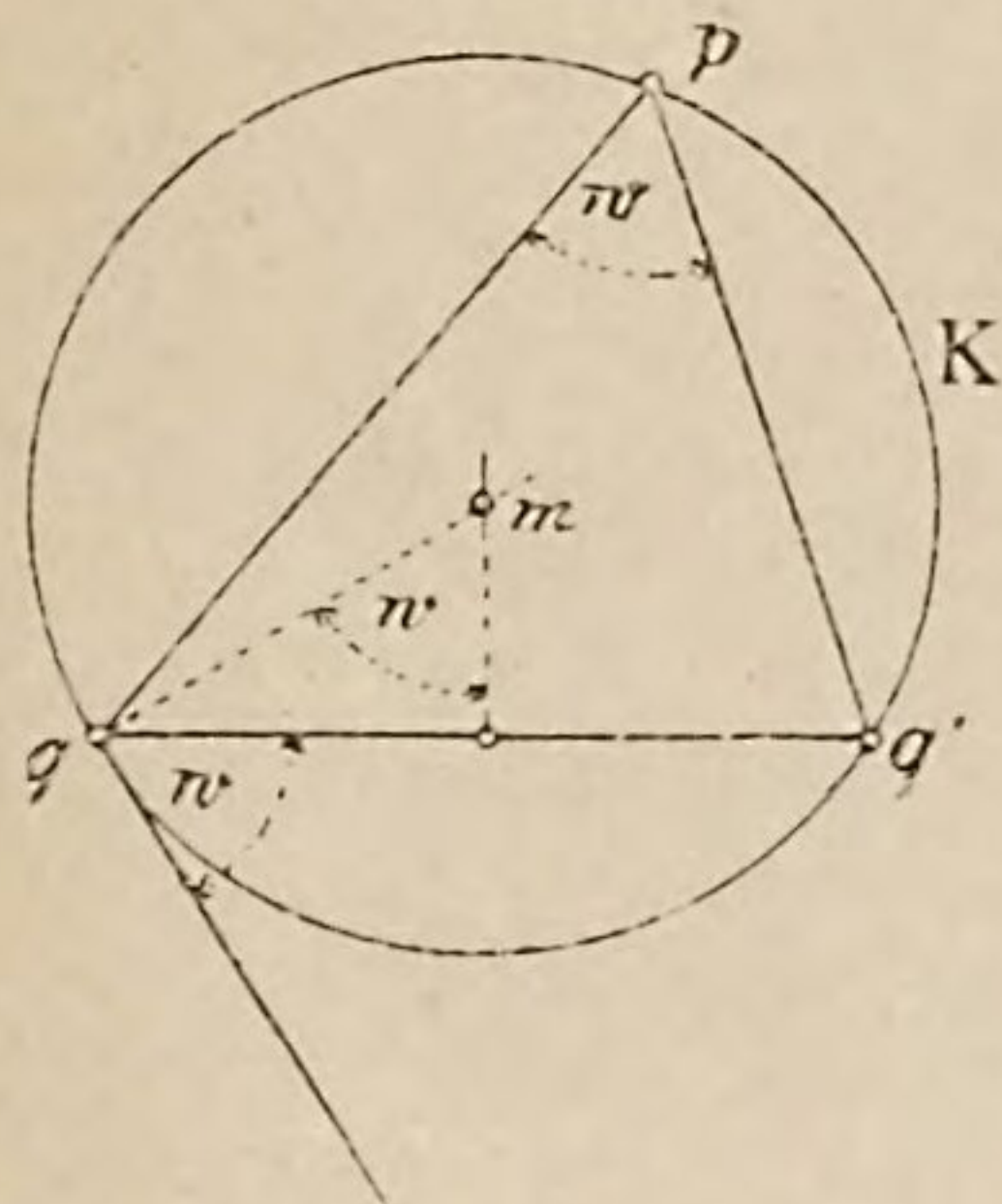
Im **Fall ϵ** denke man sich das Prisma durch eine zu den Prismenkanten senkrechte Ebene geschnitten, so liefert dieselbe in den drei Seitenflächen, deren Winkel man kennt, ein Dreieck $a' e' f'$ mit den gegebenen Winkeln W' , W'' und W''' und dieses Dreieck kann als

Erkl. 42. Die Aufgabe unter den gegebenen Bedingungen ist möglich, weil die Gerade S_1 eine der vier Geraden darstellt, auf welchen die Aehnlichkeitspunkte verteilt sind, die zu den drei auftretenden Ortskugeln mit den Mittelpunkten σ, c, e und den Halbmessern gleich den im Fall δ näher bezeichneten Entfernungen gehören, siehe auch Erkl. 265 sowie 266, I. Teil.

Erkl. 43. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:
 „Der geometrische Ort für die Spitzen p eines Winkels w von vorgeschriebener Grösse, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte q und q' gehen, ist eine über qq' beschriebene Kreislinie K .“

Der Mittelpunkt m , siehe Figur 37, dieser Kreislinie findet sich wie folgt: Man trägt an qq' in q den Winkel w an; die in q zum zweiten Winkelschenkel von w errichtete Senkrechte trifft die Halbierungssenkrechte von qq' im Mittelpunkt m des Kreises K , siehe Erkl. 44.

Figur 37.



Erkl. 44. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:
 „Der Winkel, den die Sehne mit der Tangente bildet, ist gleich dem Winkel im gegenüberliegenden Kreisabschnitt.“

Anmerkung 7. In sämtlichen Auflösungen der Aufgabe 22 sind wieder die sich darbietenden Genauigkeitsproben zu berücksichtigen, und soll in jedem der einzelnen Fälle die Zahl der vorhandenen Lösungen ermittelt werden.

Dreht man die Kreisebene K' um die Spur Q um den Winkel $90 - w_1$, so lässt sich durch den Kreis K' in seiner neuen Lage und den Kreis K_1 eine Kugel legen, deren Mittelpunkt in der Senkrechten durch m_1 zur **Pr. Eb.** E_1 liegt in einem Abstände von letzterer gleich $m_1 m^0$. K_1 kann nun als Projektion eines zu ihm kongruenten und zur **Pr. Eb.** E_1 parallelen Kugels aufgefasset werden, dessen Abstand von der **Pr. Eb.** $E_1 = 2 \cdot m_1 m^0 = m_1 m_{,,}$ sein wird. Die Ebene dieses Kreises trifft die Ebene des Kreises K' nach einer in oben genanntem Abstand zur Spur Q gezogenen Parallelen, deren Projektion $p_1 p_1^0$ durch den Schnittpunkt $p_{,,}$ der durch $m_{,,}$ zu Q geführten Senkrechten mit dem zu Q nicht senkrechten Winkelschenkel von $90 - w_1$ geht. Die Punkte p_1 und p_1^0 sind somit die Projektionen von zwei Punkten der Kugel derart, dass sie selbst auf dem Kreise K' liegen und demnach ihre Verbindungslinien mit q und q' den Winkel W' einschliessen, während die Verbindungslinien ihrer Projektionen mit denselben Punkten q und q' den Winkel W bilden.

Nachdem nunmehr die Winkel der Grundkanten aq und aq' , mit der Projektion der Seitenkante aa bestimmt sind, lässt sich die Projektion der Grundfläche des Prismas und damit auch jene der Deckfläche herstellen.

f) Ungelöste Aufgaben über das Prisma.

Aufgabe 23. Man löse die Aufgaben Nro. 21 und 22 für den Fall, dass $n = 3$, bzw. 4 ist.

Aufgabe 24. Ein vierseitiges Prisma ist zu konstruieren, wenn gegeben sind:

- zwei zusammenstossende Seitenflächen $abab$, $adad$, sowie
- die Winkel W' , W'' , W''' von aufeinanderfolgenden Seitenflächen,
- der Winkel W' der gegebenen Seitenflächen, ferner der Winkel W , welchen die gegebene Seitenfläche $abab$ mit der nicht gegebenen Seitenfläche $dcdc$ einschliesst, endlich die Länge der vierten Seitenkante cc ,
- die Winkel W'''' und W , welche die gegebene Seitenfläche $abab$ mit zweien

nicht gegebenen Seitenflächen, etwa $bcb\bar{c}$ und $dcd\bar{c}$ einschliesst, ausserdem der Winkel w_1 , unter welchem die Seitenkanten gegen die Grundfläche $abcd$ geneigt sind;

- b) **zwei nicht** zusammenstossende Seitenflächen $abab$, $dcd\bar{c}$, sowie die Winkel w''' und w'''' , welche eine der nicht gegebenen Seitenflächen etwa $bcb\bar{c}$ mit den gegebenen einschliesst;
 - c) drei Seitenflächen $abab$, $adad$, $bcb\bar{c}$.
-

Aufgabe 25. Ein dreiseitiges Prisma ist zu konstruieren, wenn gegeben sind:

- a) die Grundfläche, sowie die Winkel der Seitenflächen zu je 60° ,
 - b) eine Seitenfläche, sowie die Winkel, unter denen die noch übrigen Grundkanten gegen die Seitenkanten geneigt sind.
-

3) Ueber die Bestimmung des Schnittes von Ebenen und Geraden mit Pyramiden und Prismen.

A) Schnitt zwischen Ebene und Pyramide, Eigenschaften ebener Pyramidenschnitte und deren Projektionen.

a) Ueber die Bestimmung des Schnittes einer Ebene mit einer Pyramide.

Anmerkung 8. Bei der Ermittlung des Schnittes einer unbegrenzten Ebene mit der Oberfläche eines beliebigen Körpers besteht das Konstruktionsverfahren im allgemeinen immer darin, dass man entweder auf der Oberfläche des Körpers gewisse, leicht zu zeichnende Linien, bei einem Polyeder also etwa gleich die Kanten desselben wählt, und die Schnittpunkte dieser Linien mit der Ebene ermittelt, oder aber dass man sich umgekehrt in der Ebene gewisser gerader Linien bedient und deren Schnittpunkte mit der Oberfläche des Körpers aufsucht. Verbindet man die so erhaltenen Schnittpunkte auf der Oberfläche des Körpers in bestimmter Weise mit einander, so erhält man die Schnittfigur der Ebene mit dem Körper.

Bei einem Polyeder beruht die Herstellung eines ebenen Schnittes desselben in der mehrmals zu wiederholenden Lösung der Aufgabe: den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu konstruieren, welche Lösung bekanntlich darin besteht, dass man durch die betreffende Gerade irgend eine Ebene sich gelegt denkt und deren Schnitt mit der in Rede stehenden Ebene aufsucht; die Schnittlinie und die gegebene Gerade treffen sich im Schnittpunkt der letzteren mit der Ebene. Je nach der geometrischen Beschaffenheit der Oberfläche des zu durchschneidenden Körpers wird man durch zweckmässige Wahl der Hilfsebenen die Konstruktion der Schnittfigur wesentlich vereinfachen und erleichtern können.

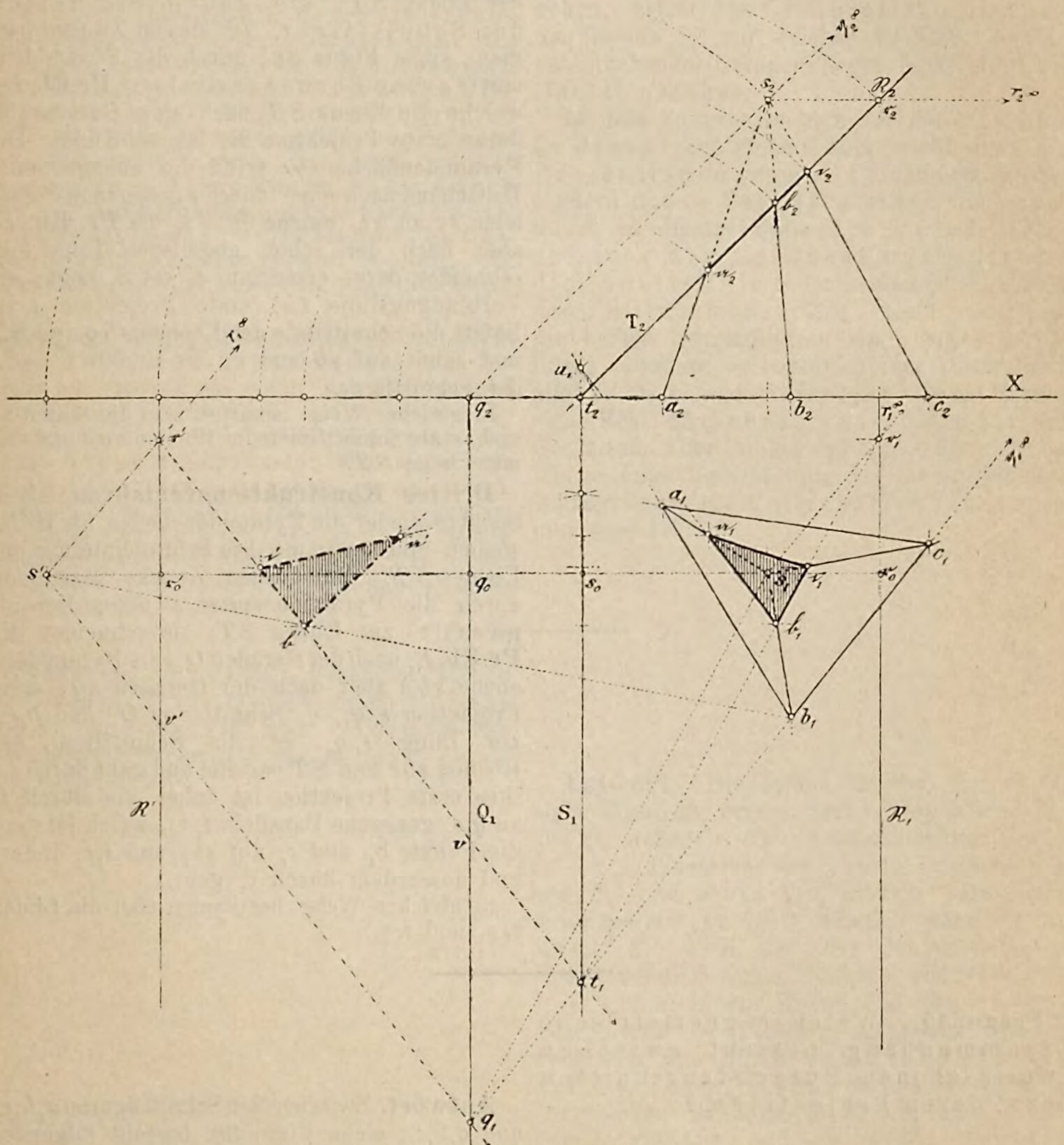
Die folgenden Beispiele sollen dies zeigen.

Frage 14. Wie ermittelt man in der Projektionszeichnung die Projektionen der Schnittfigur einer Ebene ST mit einer Pyramide $s(abc)$?

Antwort. Sind die Pr. Ebn. E_1 und E_2 frei wählbar, so nehme man E_1 mit der Grundfläche der Pyramide zusammenfallend, E_2 senkrecht zur Ebene ST an; man erhält dann die Darstellung der Projektionen wie in Figur 38.

Zur Ermittlung der Schnittfigur kann man nun eine Reihe von Verfahren anwenden, entsprechend der Wahl der zu benützenden, durch die Pyramidenkanten zu legenden Hilfsebenen.

Figur 38.



Erstes Konstruktionsverfahren. Zu-
folge der Wahl der **Pr. Ebn.** fällt die zweite
Projektion der Schnittfigur mit der Projektion
der Ebene ST , d. h. mit T_2 zusammen. Es
ergeben sich die ersten Projektionen
 a_1, b_1, c_1 der Ecken a, b, c der Schnittfigur durch
Projizieren der Ecken a_2, b_2, c_2 auf die zu-
gehörigen ersten Projektionen der Pyramiden-
kanten.

Durch Umlegen der Ebene ST um ihre
erste Spur S_1 , siehe Frage und Antw. 33 so-
wie Erkl. 243, I. Teil, erhält man die wahre
Gestalt der Schnittfigur.

Zweites Konstruktionsverfahren. Man
benütze als Hilfsebenen die Pyramiden Ebenen
selbst und bestimme deren Schnittlinien mit
der Ebene ST ; sie geben die Seiten
der Schnittfigur. Zu diesem Zwecke lege
man, siehe Figur 38, durch die Pyramiden-
spitze s eine Ebene parallel zur **Pr. Eb. E_1** ,
welche die Ebene ST nach einer Geraden $\mathfrak{R}$,
deren erste Projektion $\mathfrak{R}_1$ ist, schneidet. Die
Pyramidenfläche sbc trifft die ebenenannte
Hilfsebene nach einer durch s gezogenen Paral-
lelen sr zu bc , welche $\mathfrak{R}$ in r , die **Pr. Eb. E_1**
aber nach der schon gegebenen Linie b_1c_1
schneidet, deren erste Spur t_1 auf S_1 liegt; die
Verbindungsline tr , erste Projektion t_1r_1 ,
liefert die Schnittlinie der Ebenen sbc und ST
und somit auf sb und sc die Punkte b und c
der Schnittfigur.

In gleicher Weise ermittelt man die Seiten ba
und ca als Schnittlinien der Ebenen sab und sac
mit Ebene ST .

Drittes Konstruktionsverfahren. Man
benütze wieder die Pyramiden Ebenen als Hilfs-
ebenen und bestimme ihre Schnittlinie mit der
Ebene ST . Zu diesem Zwecke lege man
durch die Pyramidenspitze s eine Ebene
parallel zur Ebene ST ; sie schneidet die
Pr. Eb. E_1 nach der Geraden Q_1 , die Pyramiden-
ebene sbc aber nach der Geraden sq , erste
Projektion s_1q_1 , q_1 Schnitt von Q_1 und b_1c_1 ,
zur Linie s_1q_1 ist die Schnittlinie der
Ebenen sbc und ST parallel und geht durch t_1 ;
ihre erste Projektion ist daher die durch t_1
zu q_1s_1 gezogene Parallele t_1r_1 , welche letztere
die Punkte b_1 und c_1 auf sb_1 und sc_1 liefert
und ausserdem durch r_1 geht.

In gleicher Weise bestimmen sich die Linien
 b_1a_1 und c_1a_1 .

Frage 15. Welcher geometrische
Zusammenhang besteht zwischen
zweien ebenen Pyramidenschnitten
bezw. deren Projektionen?

Antwort. Zwischen den Schnittfiguren $a_1b_1c_1$
und $a_1b_1c_1$, siehe Figur 38, besteht folgender
Zusammenhang: „Jedem Punkte der einen

Erkl. 45. Das Wort „Collineation“ stammt aus dem Lateinischen (cum linea = durch die Linie zusammenhängen).

Erkl. 45a. Die Gesamtheit aller Punkte und Linien einer Ebene heisst ein ebenes System; so bilden z. B. die Punkte und Linien der **Pr. Eb.** E_1 das eine, die Punkte und Linien der Ebene ST das andere ebene System und beide Systeme sind **centrisch-collinear**, wenn zwischen ihnen der in der Antwort auf die Frage 15 geschilderte Zusammenhang besteht.

Erkl. 46. Die Antwort auf Frage 15 lässt sich in folgende Sätze kleiden:

„Zwei ebene Pyramidenschnitte und deren rechth. Projektionen auf eine Ebene sind **centrisch-collineare** Figuren bezüglich der Pyramiden- spitze bzw. deren Projektion als Collineationscentrum und der Schnittlinie beider Ebenen bzw. deren Projektion, als Collineationsachse.“

„Projiziert man zwei **centrisch-collineare** ebene Systeme rechtwinklig auf eine Ebene, so sind auch die **Projektionen** **centrisch-collinear**, bezüglich der Projektionen von Collineationscentrum und Achse, als Collineationscentrum und Achse.“

Erkl. 47. Durch die rechtwinklige Projektion zweier **centrisch-collinearen** ebenen Systeme auf eine Ebene erhält man in ein und derselben Ebene zwei **centrisch-collineare** Systeme, d. h. es sind die Punkte der Ebene doppelt aufzufassen; denn nimmt man sie als Punkte des einen Systemes, so entsprechen ihnen in der gleichen Ebene gewisse Punkte des anderen Systemes, die im allgemeinen eine von den Punkten des ersten Systemes verschiedene Lage haben werden und umgekehrt.

Frage 16. In welcher Beziehung stehen die Geraden $\mathfrak{R}$ und Q bzw. deren Projektionen zur **centrischen Collineation** der ebenen Systeme ST und E_1 bzw. deren Projektionen?

Figuren entspricht ein ganz bestimmter Punkt der anderen Figur derart, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte stets durch den Punkt s_1 gehen.“ Die Punkte a_1 und a_1 , b_1 und b_1 , c_1 und c_1 sind solche entsprechende Punkte. Ausserdem liefern je zwei Paar entsprechende Punkte, z. B. a_1 und a_1 , b_1 und b_1 zwei Geraden a_1b_1 bzw. a_1b_1 , deren Schnittpunkt t_1 auf S_1 liegt. Den eben bezeichneten Zusammenhang nennt man **centrische Collineation**, siehe Erkl. 45, und zwei Figuren, welche in diesem Zusammenhange stehen, heissen **centrisch-collineare** Figuren. Der Punkt s_1 , durch welchen die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen, heisst das **Collineationscentrum**, die Gerade S_1 , auf welcher die Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen heisst die **Collineationsachse**.

In dem Zusammenhange der **centrischen Collineation** stehen aber nicht nur die Projektionen zweier Pyramidenschnitte, sondern diese Schnitte selbst, und zwar bildet in diesem Falle die Pyramiden- spitze s das **Collineationscentrum**, die Schnittlinie S der beiden Ebenen aber die **Collineationsachse**. Allein nicht nur die beiden Schnittfiguren sind **centrisch-collinear**, sondern es entspricht der Gesamtheit aller Punkte und Linien der einen Ebene, siehe Erkl. 45a, **centrisch-collinear** die Gesamtheit aller Punkte und Linien der anderen Ebene, unter Beibehaltung der oben genannten Raumgrössen als **Collineationscentrum** und **Achse**.

Antwort. Die beiden Geraden $\mathfrak{R}$ und Q , siehe Figur 38, ebenso deren Projektionen $\mathfrak{R}_1$ und Q_1 stehen in einer bestimmten Beziehung zu der **Collineation** der ebenen Systeme ST und E_1 und deren Projektionen. Die Verbindungslinie sr läuft nämlich parallel zur Ebene E_1 , d. h. sie schneidet dieselbe in einem unendlich fernen Punkte r , siehe Erkl. 35 I. Teil, dem in der Ebene ST **centrisch-collinear** der Punkt r entspricht. Denkt man sich nun durch sämtliche Punkte der Geraden $\mathfrak{R}$ Linien nach s gezogen, so entsprechen denselben in E_1 nur unendlich ferne Punkte und da jeder Geraden im einen System wieder eine Gerade im

anderen System entspricht, so liegen diese unendlich fernen Punkte auf einer unendlich fernen Geraden R der Ebene E_1 , der entsprechenden Geraden von $\mathfrak{R}$. In der Projektion entspricht somit der Geraden $\mathfrak{R}_1$ eine unendlich ferne Gerade R_1 der **Pr. Eb.** E_1 .

In gleicher Weise entspricht auch der Geraden Q im Systeme E_1 eine unendlich ferne Gerade Ω der Ebene ST . In der Projektion entspricht somit der Geraden Q_1 des Systemes $a_1 b_1 c_1$ eine unendlich ferne Gerade Ω_1 des Systemes $a_1 b_1 c_1$.

Die Geraden $\mathfrak{R}$ und Q , welche stets parallel zur Collineationsachse S laufen, heissen die Gegenachsen der Collineation, und zwar ist die Linie $\mathfrak{R}$ die Gegenachse des Systemes ST , die Linie Q die Gegenachse des Systemes E_1 .

Frage 17. In welcher Weise lässt sich der zwischen zweien ebenen Pyramidenschnitten bestehende centriscollineare Zusammenhang zur Konstruktion des Schnittes einer Ebene mit einer Pyramide benützen?

Erkl. 48. Die wahre Gestalt $a'b'c'$, siehe Figur 38, der Schnittfigur abc ergibt sich durch Umlegung der Ebene ST um ihre erste Spur S_1 in die **Pr. Eb.** E_1 , siehe Frage und Antwort 33, I. Teil.

Zufolge des zweiten und dritten Konstruktionsverfahrens, siehe Antwort der Frage 14, ist die Figur $srtq$, ebenso ihre Projektion $s_1 r_1 t_1 q_1$ je ein Parallelogramm. Denkt man sich nun die Umlegung r' des Punktes r , wie die Figur 38 zeigt, hergestellt und das Parallelogramm $s'r't_1 q_1$ konstruiert, so fällt die Linie $t_1 r'$ mit $b'c'$ zusammen und da überdies $s'r'$ parallel $b_1 c_1$, ebenso $s'q_1$ parallel $b'c'$ ist, so stehen die Figuren $a_1 b_1 c_1$ und $a'b'c'$ gleichfalls in centriscollinearer Beziehung mit s' und S_1 als Centrum und Achse, den Linien Q_1 und $\mathfrak{R}'$ ($\mathfrak{R}'$ geht durch r' parallel zu S_1 und ist die Umlegung der Geraden $\mathfrak{R}$) als Gegenachsen; die Verbindungslinien $a_1 a'$, $b_1 b'$, $c_1 c'$ schneiden sich demnach in s' .

Erkl. 49. Die zu S_1 senkrechte Verbindungslinie $s_1 s'$ trifft die Linien $\mathfrak{R}$, S_1 , Q_1 und $\mathfrak{R}'$ in den Punkten r_0 , s_0 , q_0 und r'_0 und es ist zufolge der Kongruenz der Dreiecke $s'r'v'$ und $t_1 q_1 v$, in beiden die zu den Linien $q_1 v$ und $r'v'$ gehörige Höhe gleich, woraus folgt, dass $s'r'_0 = s_0 q_0$ sein muss. Hiemit ist aber die weitere Gleichheit $s_0 r'_0 = q_0 s'$ bedingt.

Aus vorstehender Erkl. 49 über die Lage der Gegenachse zweier in der nämlichen Ebene liegenden centriscollinearen ebenen Systeme folgt der nachstehende wichtige Satz:

Antwort. Der in der Antwort der Frage 15 erläuterte collineare Zusammenhang zwischen zweien ebenen Pyramidenschnitten und deren Projektionen kann in vielen Fällen zweckmässig benützt werden zur Bestimmung der Projektionen der Schnittfigur einer Ebene mit einer Pyramide, sobald man **einen** Punkt der Schnittfigur von vornherein kennt.

Würde man beispielsweise, siehe Figur 38, den Punkt b_1 mittels des Punktes b_2 bestimmt haben, so hätte man nur nötig, den Schnittpunkt t_1 der Verbindungslinie $b_1 a_1$ und S_1 mit b_1 zu verbinden, so liefert diese Verbindungslinie auf $s_1 c_1$ den Punkt c_1 . Treffen sich ferner $b_1 a_1$ und S_1 in u_1 , so gibt $b_1 u_1$ auf $s_1 a_1$ den Punkt a_1 .

In gleicher Weise erhielte man alle übrigen Punkte der Schnittfigur für den Fall einer n -seitigen Pyramidengrundfläche.

„In zweien **centrisch-collinearen** ebenen Systemen ist stets die Entfernung der **einen** Gegenachse von der Collineationsachse gleich der Entfernung des Collineationscentrums von der **anderen** Gegenachse, und zwar stets in gleichem Sinne gemessen.“

Erkl. 50. Für eine centrische Collineation mit dem Centrum s und den Achsen S , Q und $\mathcal{R}$ findet stets die Gleichheit statt:

$$\text{und} \quad \overline{q_0 s_0} = \overline{s r_0}$$

$$\overline{q_0 s} = \overline{s_0 r_0}.$$

Durch Division obiger Gleichheiten folgt die weitere:

$$\frac{\overline{q_0 s_0}}{\overline{q_0 s}} = \frac{\overline{s r_0}}{\overline{s_0 r_0}} = \frac{r_0 s}{r_0 s_0} \quad \text{. . . Nro. 23)}$$

d. h. die Strecken $\overline{s s_0}$ und $\overline{s_0 s}$ werden von den Gegenachsen Q und $\mathcal{R}$ in dem gleichen Verhältnis geteilt. Dieses Teilverhältnis heisst das **charakteristische Teilverhältnis** der centrischen Collineation oder auch kurzweg die **Charakteristik der centrischen Collineation** und wird in der Regel mit Δ bezeichnet; es ist also:

$$\frac{\overline{q_0 s_0}}{\overline{q_0 s}} = \frac{\overline{s r_0}}{\overline{s_0 r_0}} = \Delta \quad \text{. . . Nro. 24)}$$

Frage 18. Wieviele und welche Bestimmungsstücke sind zur Festlegung der **centrisch-collinearen** Beziehung zwischen zweien Systemen einer Ebene oder zweien ebenen Systemen überhaupt, erforderlich?

Erkl. 51. Bei zweien centrisch-collinearen ebenen Systemen kann noch der besondere Fall eintreten, dass die Collineationsachse in unendliche Ferne rückt. Dann sind entweder die Ebenen beider Systeme zu einander parallel, oder sie fallen auf einander. In beiden Fällen heissen die Systeme ähnlich; ihr Ähnlichkeitspunkt bildet das Collineationscentrum.

Zwei Kreise in parallelen Ebenen bzw. in der nämlichen Ebene gelegen, sind stets ähnliche Figuren und können auf zweifache Weise centrisch-collinear auf einander bezogen werden. In beiden Fällen befinden sich die Collineationscentra auf der Verbindungslinie der Endpunkte von je zweien parallelen entweder gleich oder ungleich gerichteten Kreishalbmessern. Sie bilden im ersten Fall die Spitzen zweier Kreiskegel, im letzteren Fall die Schnittpunkte der äusseren bzw. inneren gemeinsamen Kreistangenten.

Antwort. Die collineare Beziehung zwischen zweien ebenen Systemen ist vollkommen bestimmt, sobald man **drei** Bestimmungsstücke kennt, und zwar:

- drei Paar entsprechende Punkte, deren Verbindungslinien durch ein und denselben Punkt gehen,
- das Collineationscentrum, **ein Paar** entsprechender Punkte, sowie **eine** der drei Achsen S , Q oder $\mathcal{R}$.
- das Collineationscentrum eine der drei Achsen und den Wert der Charakteristik $\Delta = \frac{m}{n}$.

Fall a. Sind etwa, siehe Figur 39, die drei Punktpaare aa , bb , cc , deren Verbindungslinien sich in s schneiden, gegeben, so liefern die Schnittpunkte t , u und v der

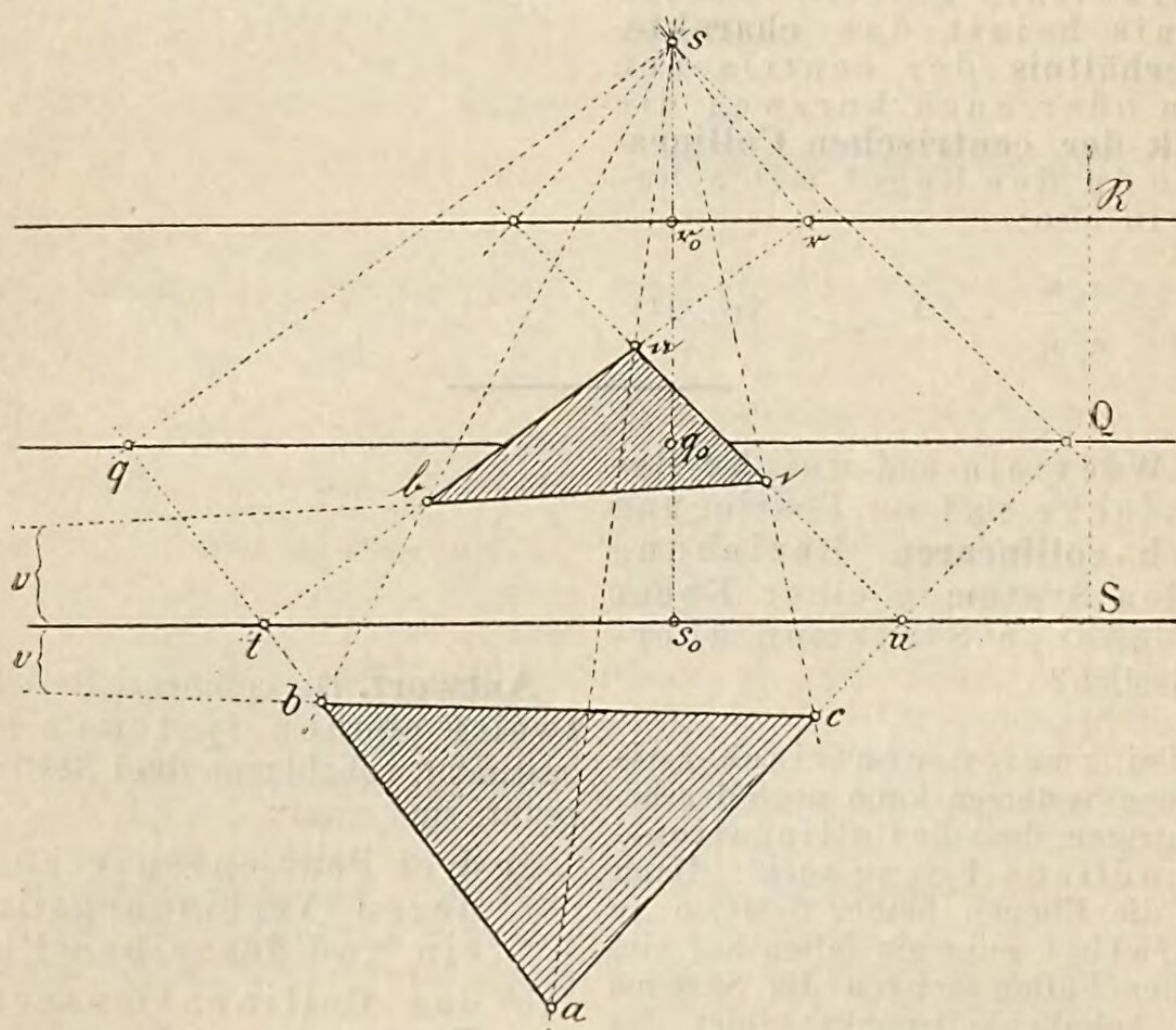
Erkl. 52. Die schon früher kennen gelernte geometrische Verwandtschaft der Affinität, siehe Erkl. 93—95, I. Teil, ist ein spezieller Fall der centrischen Collineation insoferne als das Collineationscentrum, sowie die beiden Gegenachsen in unendliche Ferne rücken, wobei ersteres durch die Affinitätsrichtung ersetzt wird.

Geraden ab und $a'b'$, ac und $a'c'$, endlich bc und $b'c'$ die Collineationsachse S , während die Durchschnittspunkte r und q der Parallelen durch s zu ab und $a'b'$ mit den Linien $a'b'$ und $a'b$ den Gegenachsen $\mathcal{R}$ und Q angehören.

Fall b. Ist z. B. S , s , sowie a und a' gegeben, so erhält man zu einem beliebig gewählten Punkte b seinen entsprechenden Punkt b' auf der Verbindungslinie ta und der Linie sb . Die Parallelen durch s zu ab und $a'b'$ bestimmen wieder, wie im Fall a, die Gegenachsen $\mathcal{R}$ und Q .

Ist aber eine der Gegenachsen, etwa $\mathcal{R}$ gegeben, so bestimmt sich zunächst der Punkt r im Durchschnitt der Parallelen durch s zu ab mit $\mathcal{R}$, hiedurch $a'b'$ und damit der Punkt t als Schnitt von ab und $a'b'$; durch t geht S , während die Parallele durch s zu $a'b'$ auf ab einen Punkt q der zweiten Gegenachse Q festlegt.

Figur 39.



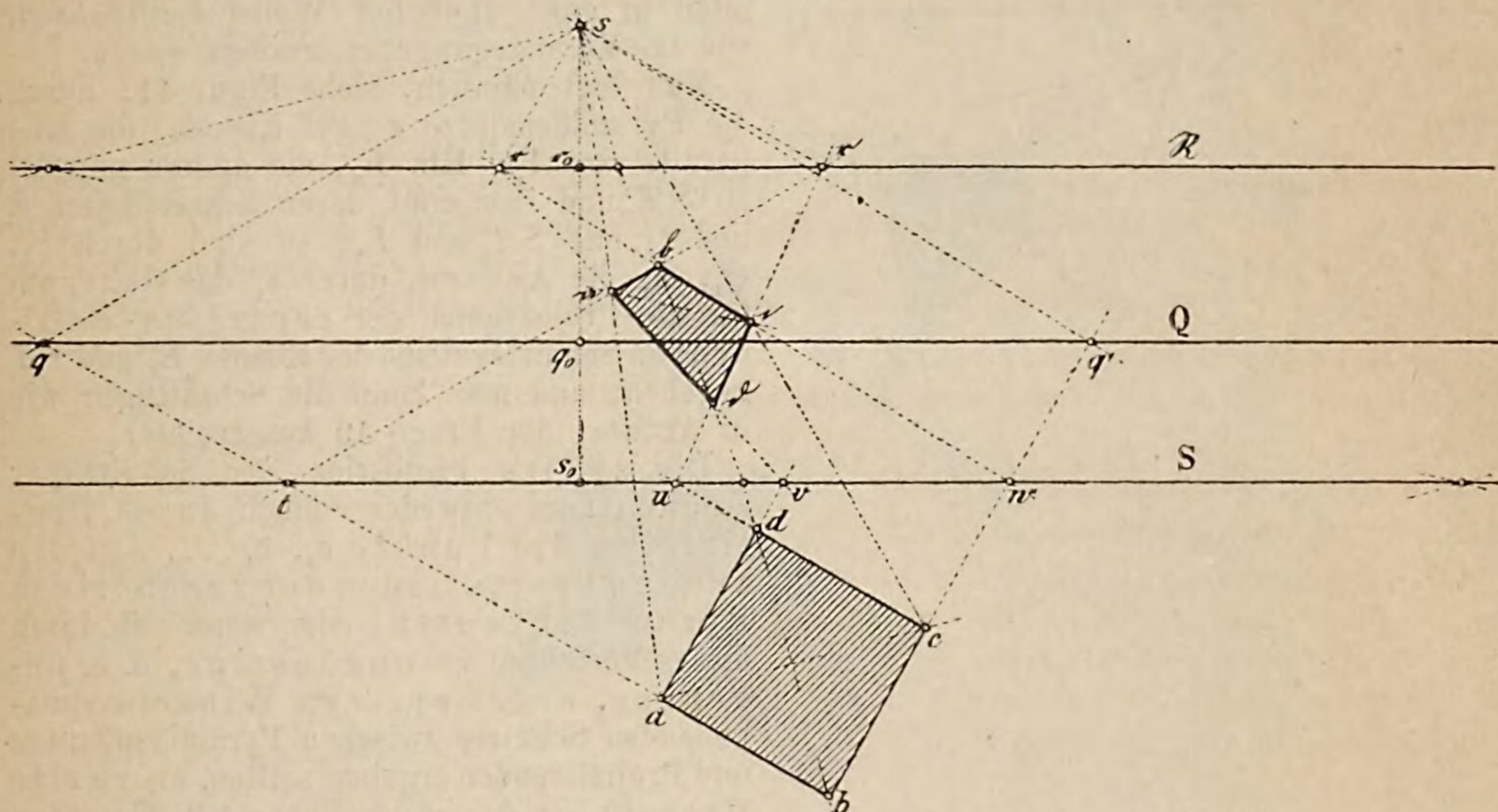
Fall c. Ist, siehe Figur 39, etwa S , s und der Wert $\frac{m}{n}$ der Charakteristik gegeben, so fälle man von s auf S die Senkrechte ss_0 , theile die Strecke ss_0 in den Punkten r_0 und q_0 in den Verhältnissen $\frac{m}{n}$ bzw. $\frac{n}{m}$, so gehen durch r_0 und q_0 die Gegenachsen der Systeme.

Frage 19. Wie ermittelt man mit Bezugnahme auf das in der Antwort der Frage 18 Gesagte zu einer beliebigen Figur die in der gleichen Ebene entsprechende centriscollineare Figur?

Erkl. 53. Wie aus dem in nebenstehender Antwort durchgeführten Beispiel zu ersehen ist, entsprechen in **centriscollinearen** Systemen **zweien parallelen** Geraden, nicht wieder **parallele**, sondern zwei auf einer der **Gegenachsen sich schneidenden Geraden**, eine sehr wichtige Eigenschaft, von welcher später noch häufig Gebrauch gemacht werden wird.

Antwort. In Rücksicht auf das in Antwort der Frage 18 Gesagte kann man zu jeder Figur einer Ebene die ihr bezüglich eines gegebenen Collineationscentrums in derselben Ebene entsprechende centriscollineare Figur konstruieren, wenn die in Antwort der Frage 18 genannten Bestimmungsstücke gegeben sind. Ein Beispiel soll dies klar machen: Man soll die **centriscollineare** Figur eines Quadrates $abcd$, siehe Figur 40, zeichnen, wenn das

Figur 40.



Collineationscentrum s , die Achse S , sowie der dem Punkte a entsprechende Punkt a' als bekannt vorausgesetzt werden. Mittels ab und a' ergibt sich zunächst die Linie ta ; auf dieser liegen die Punkte b und r entsprechend dem Punkte b' , sowie dem unendlich fernen Punkt r von $a'b'$. Dem Punkte r , durch welchen $\mathcal{R}$ zu ziehen ist, entspricht aber zugleich der unendlich ferne Punkt von cd , d. h. den parallelen Geraden ab und cd entsprechen die beiden in r sich schneidenden Geraden tr und ur ; desgleichen entspricht den unendlich fernen Punkten von ad und bc der nämliche Punkt r' auf $\mathcal{R}$, gelegen in der Parallelen durch s zu bc oder ad , so dass den Geraden ad und bc die Geraden vr' und wr' entsprechen. Hiedurch sind die Ecken a, b, c, d bestimmt; als Proben für die Genauigkeit der Zeichnung müssen die Verbindungslinien

$as \dots bs \dots$ durch die Punkte a, b hindurchgehen.

Man bestimme die zweite Gegenachse Q , sowie die den Diagonalen ac und bd entsprechenden Geraden ac und bd .

Frage 20. Wie lassen sich die in den Antworten der Fragen 15 u. ff. entwickelten collinearen Beziehungen zwischen zweien ebenen Pyramidenschnitten verwenden zur Konstruktion des Schnittes einer gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 beliebig geneigten Ebene ST mit einer Pyramide?

Antwort. Die in der Antwort der Frage 15 u. ff. entwickelten Eigenschaften zwischen zweien ebenen Pyramidenschnitten sind selbstverständlich von der Lage der **Pr. Ebn.** gegen Pyramide und schneidende Ebene vollkommen unabhängig. Ist daher durch ST die schneidende Ebene gegeben, so lässt sich die Konstruktion ihres Schnittes mit der Pyramide in ganz ähnlicher Weise durchführen, wie im Vorangegangenen gezeigt wurde.

Man legt nämlich, siehe Figur 41, durch die Pyramidenspitze s zwei Ebenen, die eine parallel zur **Pr. Eb.** E_1 , die andere parallel zu ST und bestimmt deren Schnittlinien $\mathfrak{R}$ und Q mit ST und E_1 , so sind durch $S_1, Q_1, \mathfrak{R}_1$ die Achsen, durch s_1 das Centrum für die Projektionen der centrisc-collinearen Schnittsysteme der Ebenen E_1 und ST gegeben, und man kann die Schnittfigur wie in Antwort der Frage 19 konstruieren.

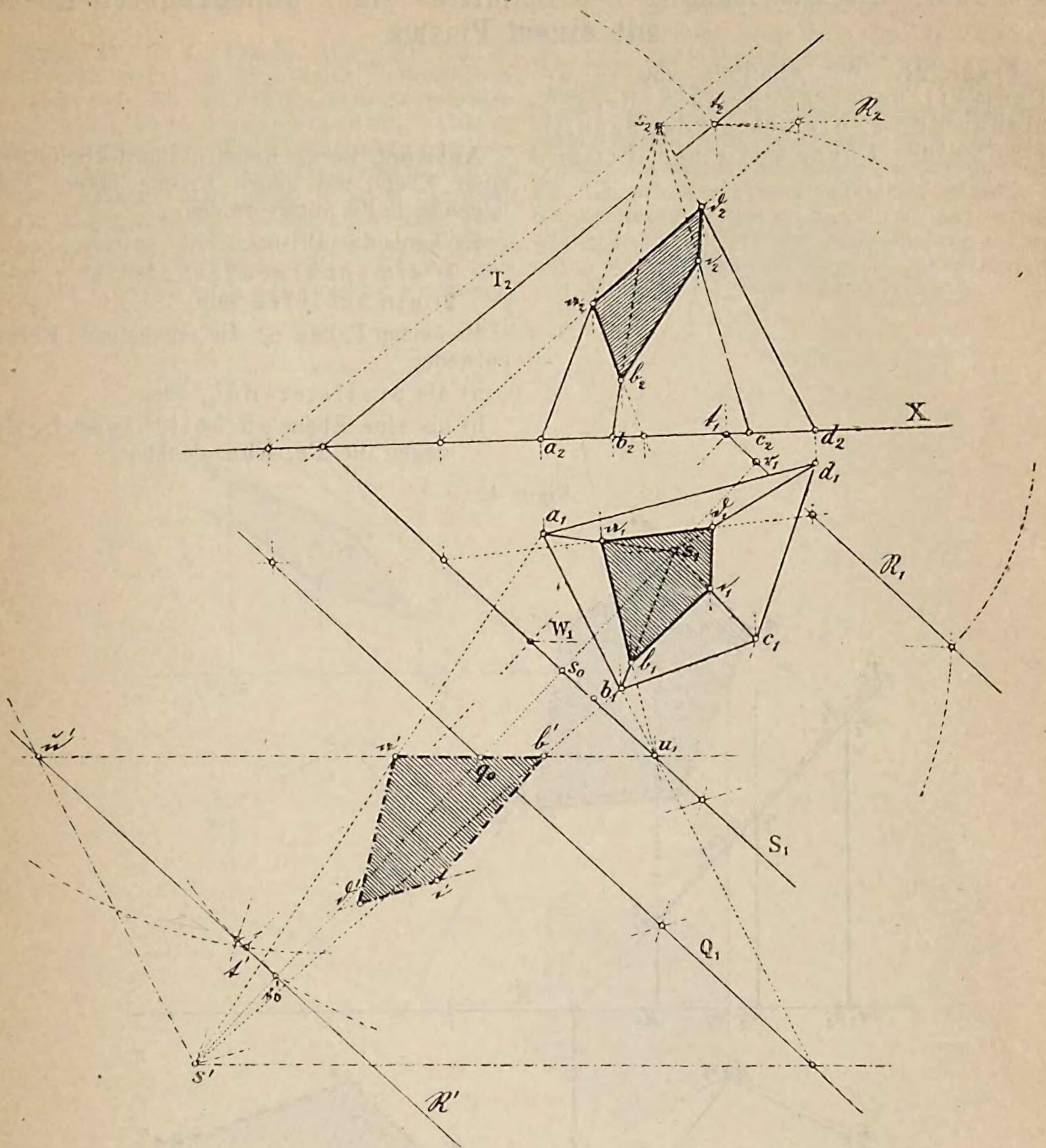
Die zweite Projektion der Schnittfigur ermittelt man entweder einfach durch Projizieren der Punkte $a_1, b_1 \dots$ auf die zweiten Projektionen der zugehörigen Pyramidenkanten, oder wenn sich durch dieses Verfahren zu ungünstige, d. h. ungenaue, unter spitzen Winkeln stattfindenden Schnitte zwischen Pyramidenkanten und Projizierenden ergeben sollten, als zweite Projektion des in der Ebene ST liegenden Vielecks a, b, c, d , siehe Aufgabe 80 sowie Erkl. 225—226, I. Teil.

Bestimmt man, siehe Figur 41, die Umlegung $\mathfrak{R}'$ der Geraden $\mathfrak{R}$ in die **Pr. Eb.** E_1 mittels eines Punktes t von $\mathfrak{R}$, so erhält man zunächst in der Senkrechten durch s_1 zu S_1 die Punkte s_0, q_0 und r_0' und hiedurch infolge der Beziehung $\overline{s_0 q_0} = \overline{r_0' s'}$ den Punkt s' , als Collineationscentrum für die Systeme E_1 und Umlegung von Ebene ST .

In der Figur 41 ist die Konstruktion der Punkte a' und b' angedeutet; es ist $s'u'$ parallel zu $a_1 b_1$ gezogen und $u_1 u'$ verbunden; auf letzterer Linie und den Verbindungslinien $s'a_1$ und $s'b_1$ liegen die Punkte a' und b' .

Selbstverständlich ist die wahre Gestalt der Schnittfigur auch direkt durch Umlegung der Ebene ST um ihre Spur S_1 mittels Zuhilfenahme der Konstruktionsdreiecke der einzelnen Punkte sowie der Affinitätsbeziehung zwischen Umlegung und Projektion zu erhalten

Figur 41.



Die Konstruktion als **centrisch-col-lineare** Figur zur Spur der Pyramide gestattet jedoch die Bestimmung der wahren Gestalt der Schnittfigur ohne Kenntnis ihrer Projektionen.

Anmerkung 9. Man ermittle ein Konstruktionsverfahren zur Bestimmung des Schnittes einer Pyramide und einer Ebene ST unter Benützung von durch die Pyramidenkanten gelegten Hilfsebenen, welche entweder

- a) projizierende Ebenen sind, oder
- b) die Gerade sr , oder
- c) die Gerade sp , oder
- d) irgend eine in den beiden Parallelebenen sR oder sQ liegende Gerade enthalten.

B) Ueber die Bestimmung des Schnittes einer unbegrenzten Ebene mit einem Prisma.

Frage 21. Wie ermittelt man in der Projektionszeichnung die Projektionen und wahre Gestalt der Schnittfigur einer Ebene mit einem Prisma?

Antwort. Bei der Konstruktion des Schnittes einer Ebene mit einem Prisma lassen sich folgende Fälle unterscheiden.

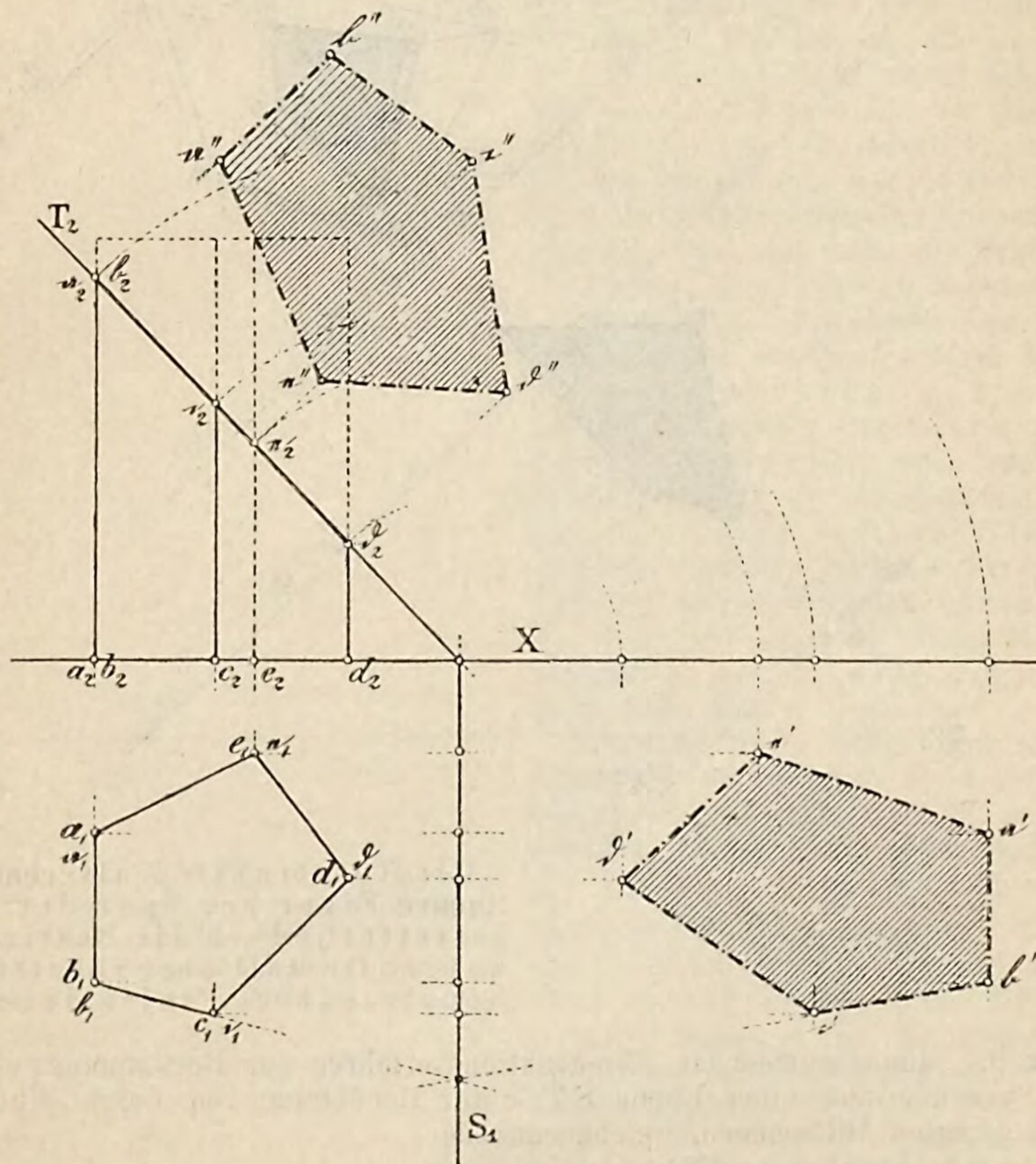
Es kann das Prisma

- 1) ein senkrechtes, oder
- 2) ein schiefes sein.

In beiden Fällen ist die schneidende Ebene entweder

- a) als projizierende, oder
- b) als eine Ebene in beliebiger Lage gegen die **Pr. Ebn.** denkbar.

Figur 42.



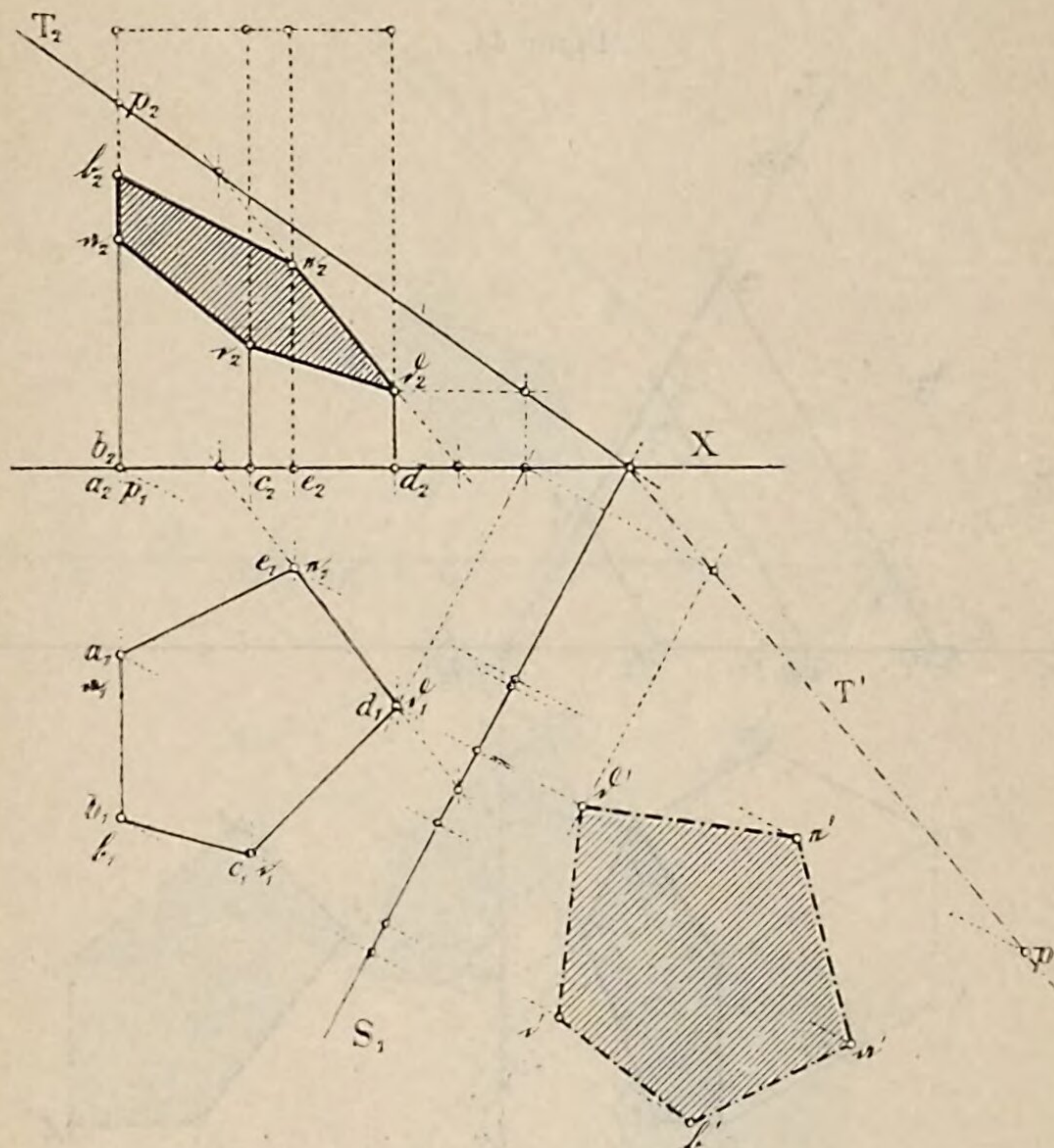
In jedem der angeführten Fälle wird man eine Grundfläche des Prismas in eine **Pr. Eb.** legen. Steht nun etwa im **Fall 1a** das Prisma auf der ersten, die schneidende Ebene auf der zweiten **Pr. Eb.** senkrecht, siehe Figur 42, so sind beide Pro-

Erkl. 54. Da das Prisma auf der **Pr. Eb.** E_1 senkrecht steht, so sind seine Seitenflächen projizierende Ebenen, ihre ersten Spuren also zugleich ihre Projektionen. Alle in den Seitenflächen befindlichen Punkte oder Geraden haben ihre ersten Projektionen in diesen Spuren. Man nennt deshalb die erste Spur a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 des Prismas auch seine erste Projektion. Die erste Projektion jeder auf dem Prisma befindlichen Figur fällt mit der Projektion des Prismas zusammen.

jektionen der Schnittfigur schon von vornherein gezeichnet, siehe Erkl. 54. Die wahre Gestalt der Schnittfigur ergibt sich in zweifacher Weise, je nachdem die Umlegung ihrer Ebene in die erste oder zweite **Pr. Eb.** vorgenommen wird, siehe Erkl. 243, I. Teil.

Steht die schneidende Ebene auf der gleichen **Pr. Eb.** wie das Prisma senkrecht, so besteht die Schnittfigur aus zweien zu den Seitenkanten parallelen Geraden (Mantellinien), welche durch die Schnittpunkte der gleichnamigen Spur von Ebene und Prisma hindurchgehen.

Figur 43.

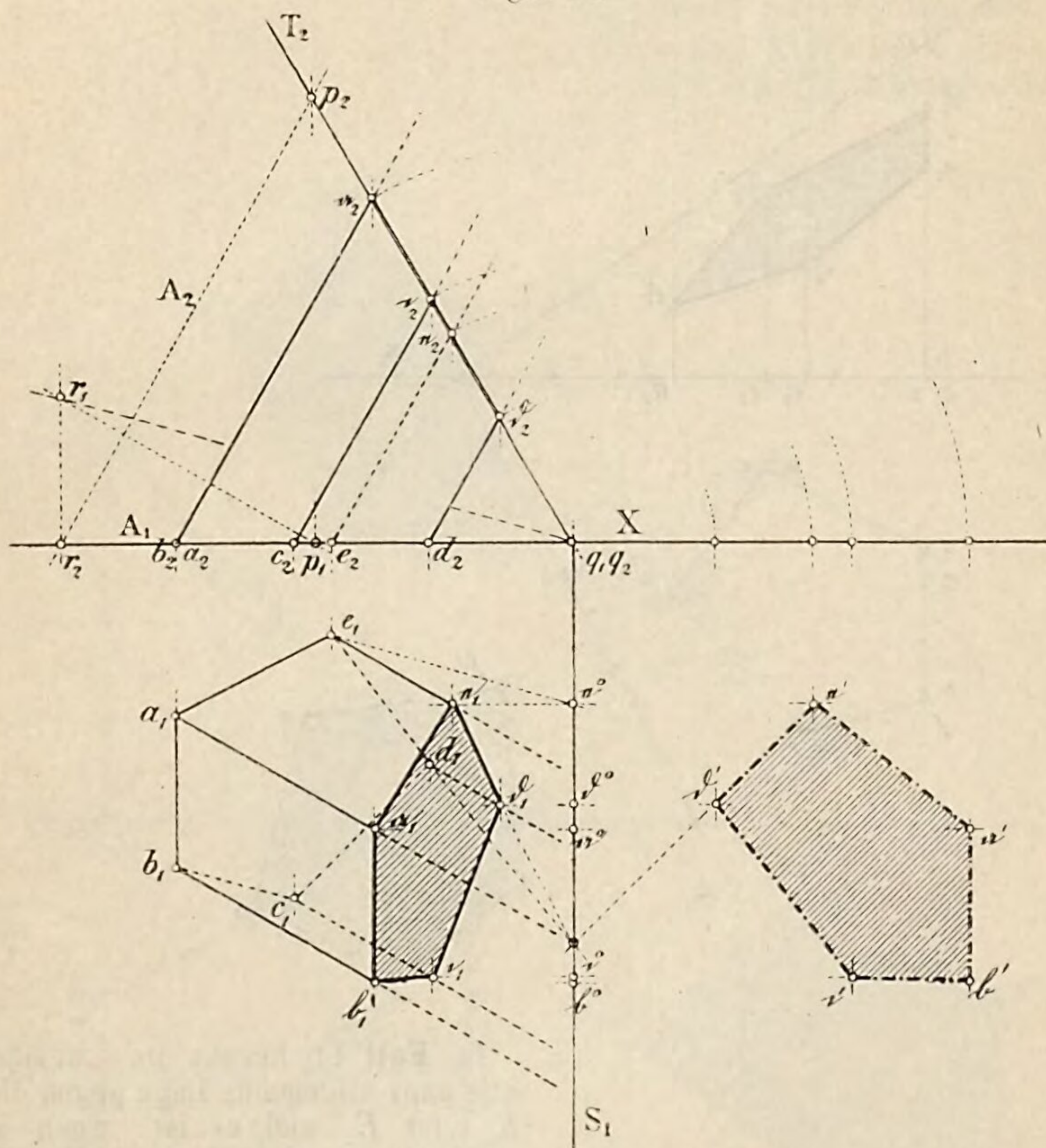


Im **Fall 1b** besitzt die schneidende Ebene eine ganz allgemeine Lage gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 und es ist, wenn das Prisma senkrecht zu einer (ersten) **Pr. Eb.** vorausgesetzt wird, die eine (erste) Projektion der Schnittfigur schon gezeichnet. Die andere (zweite) Projektion ermittelt sich als Projektion einer der Ebene ST' , siehe Figur 43, angehörigen Figur, entweder, indem man direkt die zweiten Projektionen der Vielecksseiten zeichnet, wie das z. B. für die Seite ed geschehen ist, oder durch Ziehung von Spurparallelen, siehe Punkt b , durch die ersten Projektionen der Vieleckspunkte und Ermittlung von deren zweiten Projektionen, oder

endlich mit Benützung der Affinitätsachse der Ebene ST , siehe hierüber auch Aufgabe 80 u. s. f., I. Teil.

Die wahre Gestalt bestimmt sich durch Umlegung der Ebene ST etwa um ihre erste Spur S_1 in die **Pr. Eb.** E_1 . In der Figur 43 ist hiebei die Umlegung T' der Spur T mit Zuhilfenahme eines beliebigen Punktes p auf T ermittelt worden, wodurch sich die Umlegungen der durch die Vieleckspunkte gezogenen Spurparallelen als Parallele zu T' ergeben, siehe Punkt δ bzw. δ' , auf welchen die Umlegungen α' , b' ... δ' sich befinden.

Figur 44.

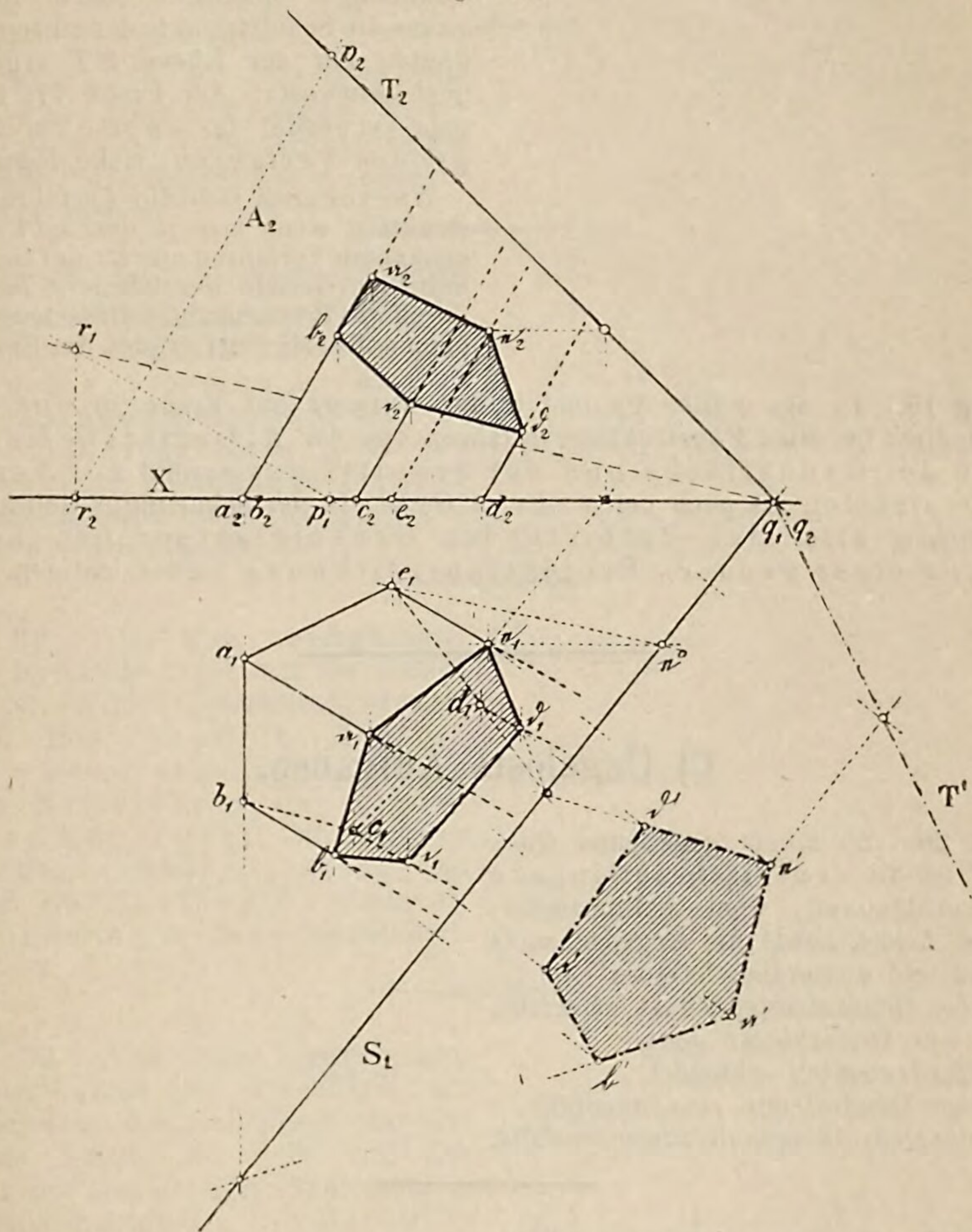


Im **Fall 2a** hat man, wenn durch S_1T_2 , siehe Figur 44, die schneidende Ebene dargestellt ist, die zweiten Projektionen der Schnittfigur unmittelbar auf der Geraden T_2 liegend; die ersten ergeben sich durch Herabprojizieren der Punkte a_2 bis d_2 auf die zugehörigen Prismenkanten nach a_1 bis d_1 .

Man könnte auch, wenn beispielsweise die Schnitte der Projizierenden mit den ersten Projektionen der Prismenkanten zu spitzwinklig, d. h. zu ungenau ausfallen

sollten, ein anderes Verfahren einschlagen, in dem man durch die Prismenkanten Hilfs-
ebenen legt, parallel zu einer be-
liebigen Geraden der Ebene ST , etwa
gleich parallel zur Geraden T . Diese
Ebenen schneiden die gegebene Ebene nach
Geraden parallel zu T , siehe Erkl. 34
I. Teil, in der ersten Projektion also nach
Parallelen zur X -Achse, auf welchen
die ersten Projektionen der Punkte der
Schnittfigur liegen müssen.

Figur 45.



In der Figur 44 ist der Punkt p auf T beliebig
angenommen und durch ihn eine Ebene gelegt,
enthaltend die Gerade T sowie die Parallele A
zur Prismenrichtung und die erste Spur $q_1 r_1$
dieser Ebene bestimmt worden. Verschiebt man
nun die Ebene TA parallel zu sich selbst so,
dass sie der Reihe nach die einzelnen Prismen-
kanten enthält, so bleiben ihre erste Spuren
parallel zu $r_1 q_1$, gehen durch die Eckpunkte a_1
bis d_1 der Grundfläche und treffen die Spur S_1

Erkl. 55. Steht die schneidende Ebene ST senkrecht zur Prismenrichtung, so nennt man den erzeugten Schnitt einen Normalschnitt oder das Profil des Prismas. Man ermittle für das in Figur 45 dargestellte Prisma einen Normalschnitt desselben in seinen Projektionen und seiner wahren Gestalt.

in Punkten a^0 bis d^0 , durch welche parallel zur X -Achse die Schnittlinien genannter Ebenen mit der Ebene ST zu ziehen sind, welche ihrerseits die ersten Projektionen a_1 bis d_1 der Schnittfigur enthalten.

Die wahre Gestalt ist in der Figur durch Umlegung der Ebene ST um ihre Spur S_1 bestimmt. Die Konstruktion ist für den Punkt e ausgeführt.

Im **Fall 2b** kann man entweder die durch die Prismenkanten gehenden projizierenden Ebenen zur Konstruktion der Schnittfigur benutzen, indem man nacheinander die Schnittpunkte der einzelnen Prismenkanten mit der Ebene ST ermittelt, siehe auch Antwort b der Frage 77, I. Teil, oder man verwendet das zweite im Fall 2a angegebene Verfahren, siehe Figur 45.

Wie gestaltet sich die Ausführung der Konstruktion, wenn man in dem im Fall 2a zuletzt genannten Verfahren anstatt der Geraden T eine beliebige Gerade der Ebene ST wählt, d. h. durch die Prismenkanten Hilfsebenen parallel zu einer willkürlichen Geraden der Ebene ST' legt?

Anmerkung 10. In den Fällen 2a und b der Antwort auf Frage 20 wird man selbstverständlich bei allen Konstruktionsverfahren von der Affinitätsbeziehung zwischen der Grundfläche und der Schnittfigur sowohl zur Verzeichnung der Projektion als auch der wahren Gestalt der Schnittfigur Gebrauch machen, desgleichen alle sich darbietenden Genauigkeitsproben behufs Erzielung einer genauen Projektionszeichnung berücksichtigen.

C) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 26. Zu einem gegebenen Quadrate $abcd$ ist die centrisch-collineare Figur zu konstruieren, wenn Collineationscentrum und Achse, sowie die Gegenachse Q bekannt sind und ausserdem letztere

- keine der Quadratseiten selbst schneidet,
 - durch eine Quadratecke geht,
 - zwei Quadratseiten schneidet,
 - mit einer Quadratseite zusammenfällt,
 - mit einer Quadratdiagonale zusammenfällt.
-

Aufgabe 27. Zu einem beliebigen Viereck $abcd$ ist die centrisch-collineare Figur derart zu konstruieren, dass dieselbe ein Quadrat von gegebener Seitenlänge werde.

Aufgabe 28. Ein Dreieck abc , eine Transversale S desselben und drei beliebige Geraden $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sind gegeben. Mit der Geraden S

als Collineationsachse ist zu dem Dreiecke abc das centriscollineare Dreieck abc so zu konstruieren, dass seine Ecken a, b, c bzw. auf den Geraden $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ liegen.

Aufgabe 29. Ein Dreieck abc und vier Punkte s, a', b', c' sind gegeben. Mit dem Punkte s als Collineationscentrum ist zu dem Dreieck abc das centriscollineare Dreieck abc so zu konstruieren, dass seine Seiten bzw. durch die Punkte a', b', c' gehen.

Aufgabe 30. Es ist die centriscollineare Figur eines Kreises K zu konstruieren, wenn Collineationscentrum und Achse, sowie die Gegenachse Q beliebig gewählt werden können.

Aufgabe 31. Der Mantel einer sechsseitigen Pyramide, deren Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegt, ist durch eine Ebene so zu schneiden, dass die auf dreien nicht aufeinanderfolgenden Seitenkanten befindlichen Schnittpunkte von der Pyramidenspitze gleiche Entfernung besitzen und die Schnittfigur gegebenen Flächeninhalt habe.

Aufgabe 32. Von einer regelmässigen sechsseitigen Pyramide kennt man die Grundfläche und den Winkel zusammenstossender Seitenflächen. Die Pyramide ist durch eine Ebene so zu schneiden, dass sie durch den Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel geht, auf einer der Seitenflächen senkrecht steht und mit der **Pr. Eb.** E_1 einen Winkel von vorgeschriebener Grösse einschliesst.

Aufgabe 33. Von einer sechsseitigen Pyramide kennt man die Grundfläche als reguläres Sechseck, den Halbmesser der ihr umschriebenen Kugel, die Höhe und den Winkel unter dem eine der Seitenkanten gegen die Grundfläche geneigt ist. Die Pyramide ist durch eine Ebene, die durch den Mittelpunkt erwähnter Kugel geht so zu schneiden, dass ihre Schnittpunkte von dreien nicht aufeinanderfolgenden Seitenkanten Entfernungen besitzen, die sich wie drei gegebene Zahlen oder Längen m, n und p verhalten.

Aufgabe 34. Der Mantel einer vierseitigen Pyramide ist so zu schneiden, dass die Schnittfigur ein Parallelogramm von vorgeschriebenem Flächeninhalte werde.

Aufgabe 35. Von einer dreiseitigen Pyramide kennt man zwei Seitenflächen und den Halbmesser der umschriebenen Kugel. Es sind die Projektionen und das Netz der Pyramide zu zeichnen.

Aufgabe 36. Von einer durch eine Ebene abgestumpften Pyramide kennt man die Grundfläche und zwei zusammenstossende Seitenflächen. Es sind die Projektionen, sowie das Netz des Pyramidenstumpfes zu zeichnen.

Aufgabe 37. Von einem n -seitigen Prisma kennt man seinen Normalschnitt (Profil), ferner:

- a) drei Seitenkanten und die Winkel w_1 und w_1' der Seitenkanten mit beiden Grundflächen,
- b) zwei Seitenkanten, die Winkel w_1 und w_1' , endlich den Winkel W_1 beider Grundflächen,
- c) eine Seitenkante, die Winkel w_1 , w_1' und W_1 , sowie den Winkel W_1' einer Seitenfläche mit der Grundfläche,
- d) die Winkel w_1 , w_1' und W_1 , sowie drei Zahlen oder Längen m , n , p die sich wie die Längen der Seitenkanten $\overline{aa}$, $\overline{cc}$ und $\overline{ee}$ verhalten.

Es sind die Projektionen der Pyramide darzustellen.

Aufgabe 38. Von einem dreiseitigen Prisma ist die Grundfläche, die Richtung der Seitenkanten, sowie der Winkel W_1 beider Grundflächen gegeben; die Längen der drei Seitenkanten sollen sich wie $m:n:p$ verhalten. Es sind die Projektionen und das Netz des Prismas zu zeichnen.

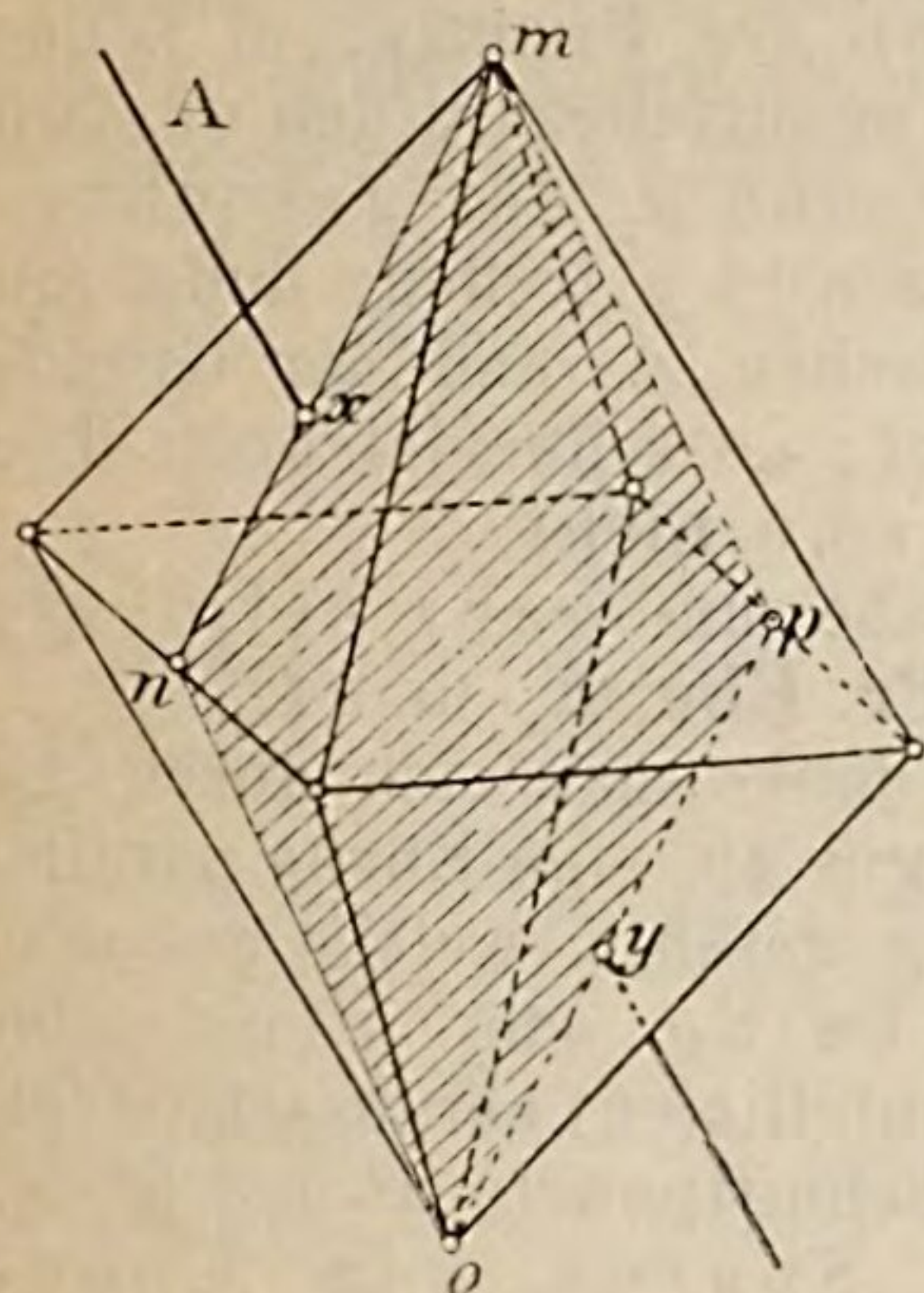
Aufgabe 39. Es sind ein Prisma und eine Gerade gegeben; das Prisma ist durch eine jene Gerade enthaltende Ebene so zu schneiden, dass die Schnittfigur gegebenen Flächeninhalt habe.

Aufgabe 40. Ein dreiseitiges Prisma ist durch eine durch einen gegebenen Punkt geführte Ebene so zu schneiden, dass seine Schnittfigur einem gegebenen Dreieck **ähnlich** werde.

D) Ueber die Bestimmung des Schnittes einer Geraden mit Pyramiden und Prismen.

Anmerkung 11. Die Aufgabe, den Schnitt einer Geraden mit der Oberfläche eines Körpers zu konstruieren, ist mit der Aufsuchung eines ebenen Körperschnittes zugleich gelöst; denn denkt man sich

Figur 46.



durch die gegebene Gerade, siehe Figur 46, eine Ebene von ganz beliebiger Lage geführt und deren Schnittfigur mit der Oberfläche des Körpers ermittelt, so wird dieselbe im allgemeinen ein beliebiges Vieleck mnp sein, das mit der gegebenen Geraden A entweder keinen Punkt oder nur einen Punkt oder aber zwei Punkte x und y gemein hat.

Im ersten Fall schneidet die Gerade A die Oberfläche des Körpers gar nicht, im zweiten Fall geht sie gerade durch eine Kante des Körpers, im dritten Fall dagegen hat die Gerade mit der Oberfläche des Körpers zwei Punkte x und y , einen Eintrittspunkt x und einen Austrittspunkt y gemeinsam.

Durch zweckmässige Wahl der durch die Gerade zu führenden Hilfsebene wird man bei den verschiedenen Körpern Konstruktionsvereinfachungen erzielen können.

Folgende Beispiele sollen dies zeigen.

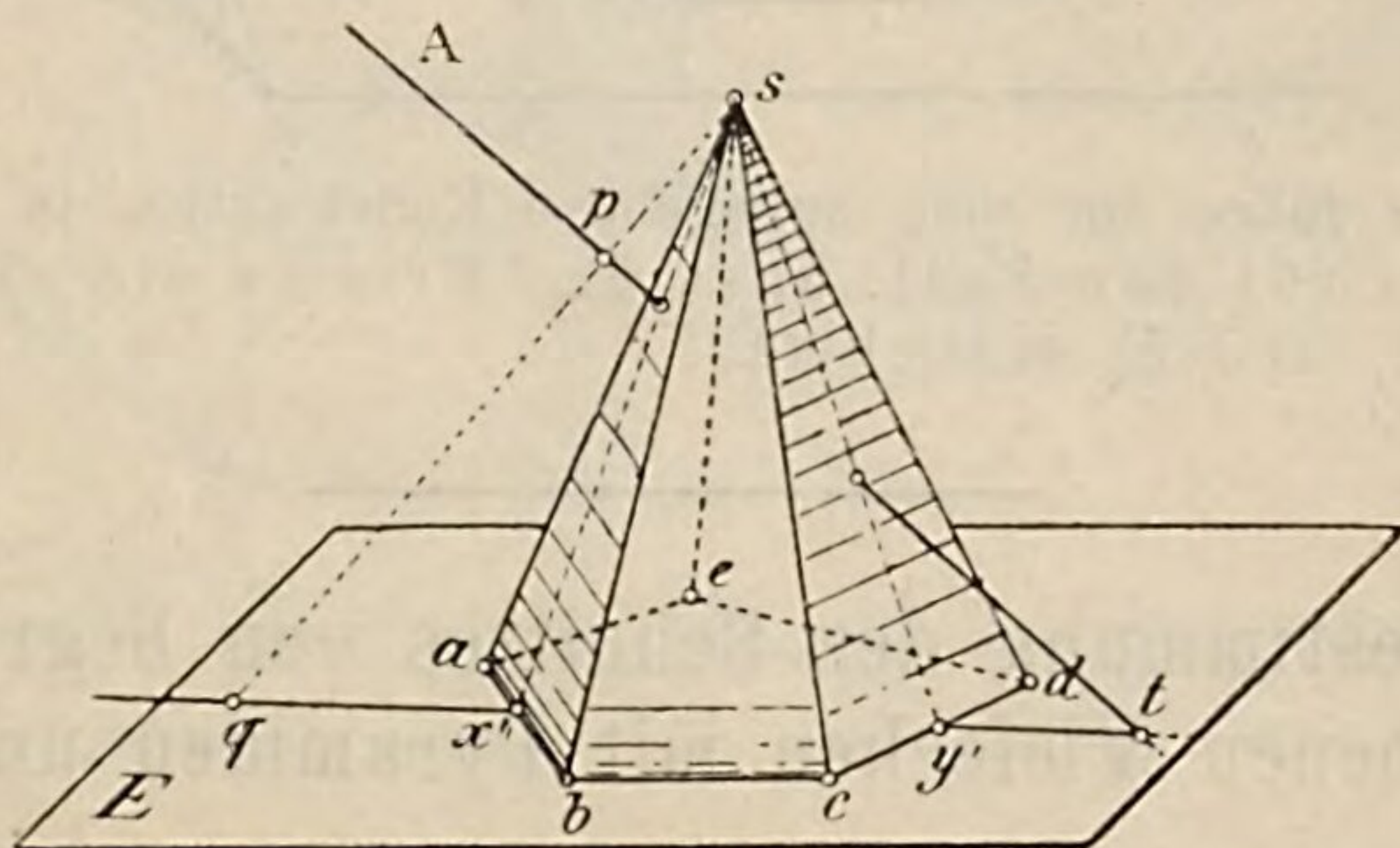
a) Schnitt einer Geraden mit einer Pyramide.

Frage 22. Wie ermittelt man am zweckmässigsten den Schnitt einer Geraden mit einer Pyramide?

Erkl. 56. Man könnte selbstverständlich durch die Gerade A auch eine ganz willkürliche Ebene führen, deren Schnittfigur mit der Pyramide nach dem Vorausgegangenen ermitteln und erhielte dann gleichfalls die gesuchten Durchschnittpunkte. Am einfachsten und deshalb am zweckmässigsten ist aber das in der Antwort der Frage 22 angegebene Konstruktionsverfahren.

Antwort. Man denke sich, siehe Figur 47, durch die Gerade A und die Pyramiden spitze eine Ebene gelegt und deren Schnitt mit der Pyramide aufgesucht. Dieser Schnitt besteht aus zwei Mantellinien sx' und sy' gehend durch die Schnittpunkte x' und y' der gleichnamigen Spuren von Ebene sA und Pyramide. Die Spur S der Ebene ermittelt man am einfachsten als Verbindungslinie der Spuren s und t der gegebenen Geraden A und einer zweiten beliebigen Geraden sp der Ebene sA .

Figur 47.



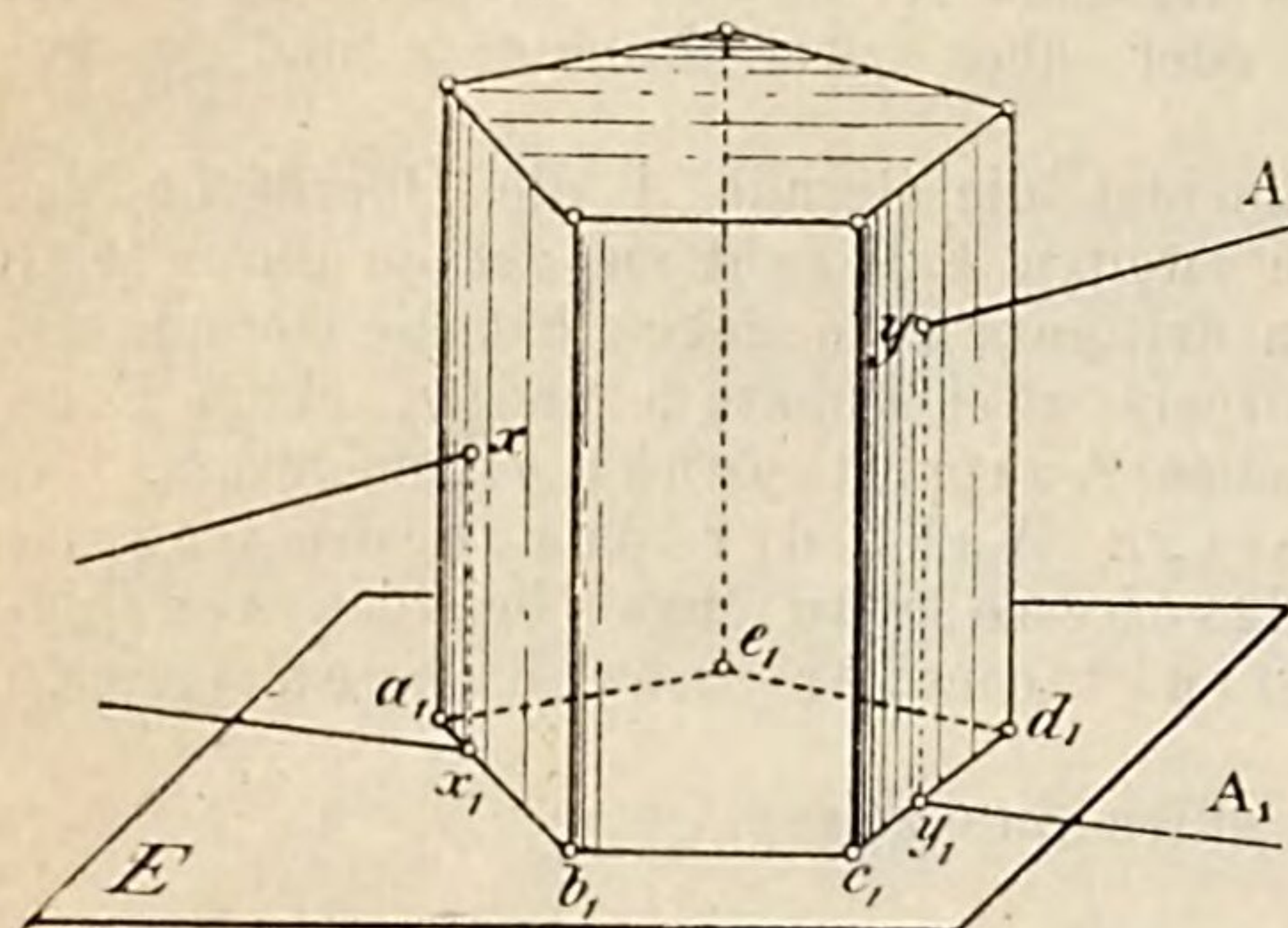
Anmerkung 12. Man führe die eben angedeuteten Konstruktionen in der Projektionszeichnung durch, wenn die Pyramide die bequemste Lage gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 einnimmt.

b) Schnitt einer Geraden mit einem Prisma.

Frage 23. Wie ermittelt man am zweckmässigsten den Schnitt einer Geraden mit einem Prisma?

Erkl. 57. Das in Erkl. 56 Gesagte gilt auch für den nebenstehenden Fall.

Figur 48.



Antwort. 1) Das Prisma stehe senkrecht auf einer **Pr. Ebn.**, etwa E_1 .

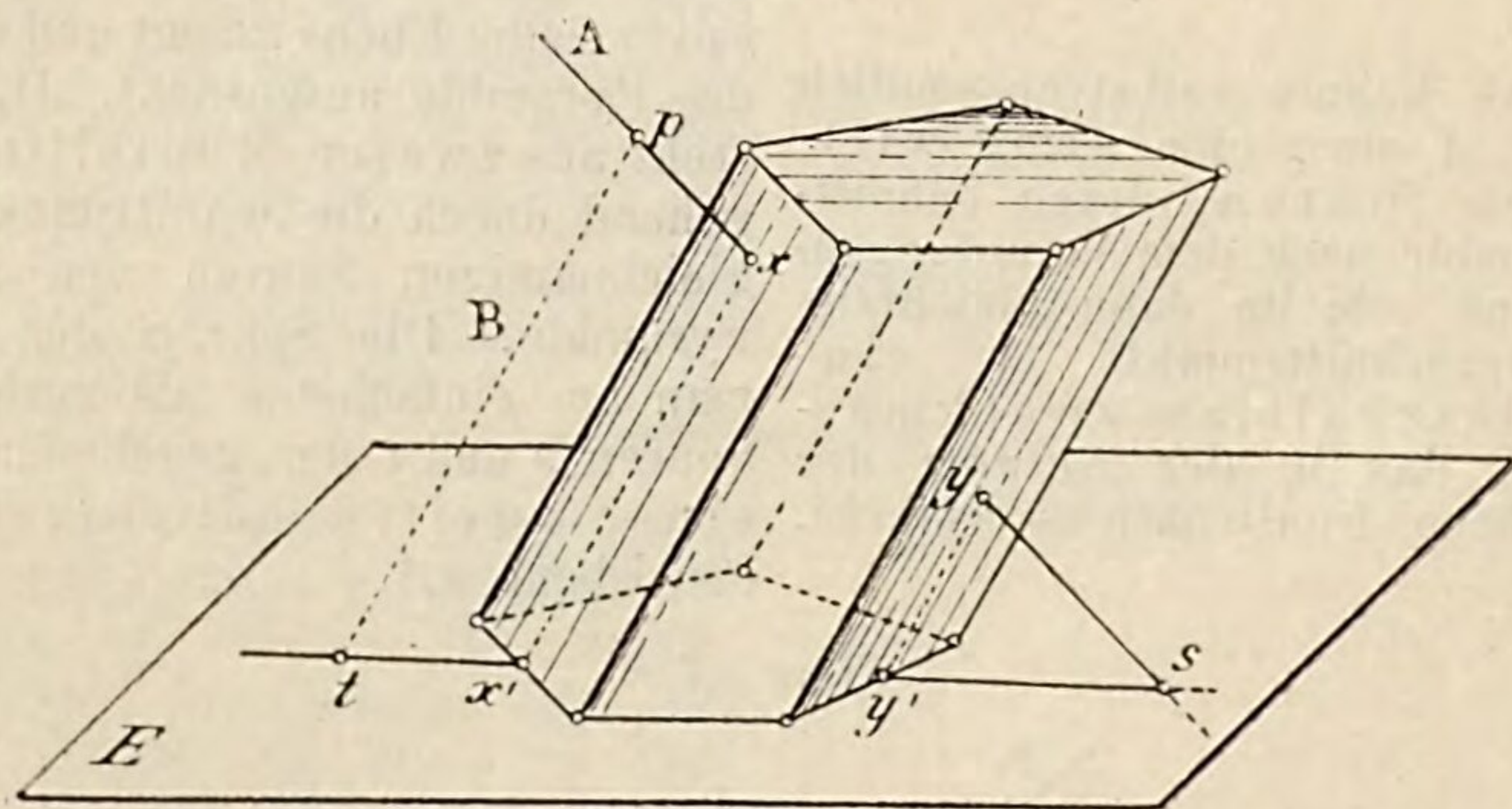
In diesem Falle wird die erste Projektion A_1 der Geraden A , siehe Figur 48, die erste Projektion des Prismas, d. i. das Vieleck $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ unmittelbar in den ersten Projektionen x_1 und y_1 der gesuchten Schnittpunkte x und y treffen; findet ein solcher Schnitt zwischen A_1 und der Grundfläche nicht statt, so schneidet auch die Gerade das Prisma **nicht**.

2) Das Prisma habe eine ganz beliebige Lage gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 .

In diesem Falle denke man sich durch die Gerade A , siehe Figur 49, eine Ebene parallel zur Prismenrichtung geführt, welche aus dem Prisma entweder keine oder eine oder zwei Gerade (Mantellinien) herauschneidet, gehend durch die Schnittpunkte x' und y' der gleichnamigen Spuren von Ebene und Prisma.

Die Spur S_1 wird erhalten als Verbindungslinie der Spuren s und t der Geraden A und einer durch einen beliebigen Punkt p von A zur Prismenrichtung gezogenen Parallelen B .

Figur 49.



Anmerkung 13. Man führe die eben angegebene Konstruktion in der Projektionszeichnung aus für den Fall, dass das Prisma die einfachste Lage zu den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 einnehme.

E) Ueber die Bestimmung des Schnittes von begrenzten Ebenen, d. i. von ebenen Vielecken mit Pyramiden und Prismen.

Anmerkung 14. Bei der Aufsuchung des Schnittes einer begrenzten Ebene mit der Oberfläche eines Körpers (Polyeders) kann man im allgemeinen zwei Verfahren einschlagen; entweder man nimmt die Ebene zunächst als unbegrenzt an und bestimmt deren Schnitt mit der Körperoberfläche wie bisher, oder man ermittelt

nach einander sowohl die Schnittpunkte der Körperkanten mit der gegebenen Ebene als auch jene der Begrenzungsseiten der Ebene mit den Flächen des Körpers. Als eigentlicher Schnitt gilt dann nur der von der Begrenzung der Ebene eingeschlossene Teil der Schnittfigur.

An folgenden Beispielen soll die Konstruktion erläutert werden.

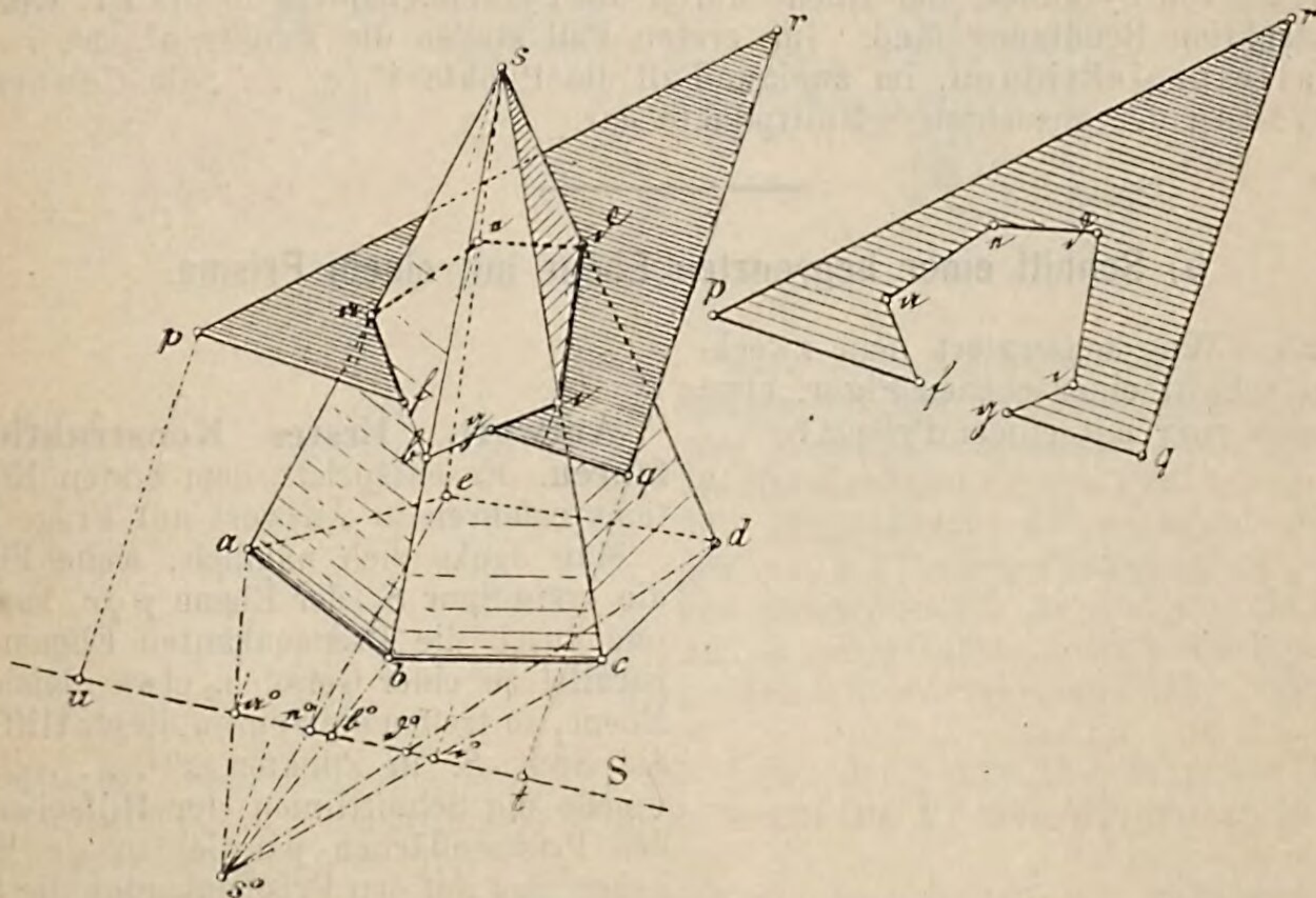
a) Schnitt einer begrenzten Ebene mit einer Pyramide.

Frage 24. Wie konstruiert man zweckmässig den Schnitt einer ebenen Figur, etwa eines Dreiecks mit einer Pyramide?

Antwort. Erstes Konstruktionsverfahren. Nach dem in der Anmerkung 14 Gesagten bestimme man zunächst, siehe Figur 50, die (erste) Spur S der Dreiecksebene pqr als Verbindungslinie tu der Spuren der Geraden qr und einer Parallelen zu ihr durch p . Legt man nun zur Bestimmung der Schnittfigur durch die Pyramidenkanten Ebenen parallel zur Linie qr , so gehen deren Spuren einmal durch die Spuren a bis e der Pyramidenkanten und ausserdem durch die Spur s^0 der Parallelen durch s zu qr und treffen die Spur S in Punkten a^0 , b^0 bis e^0 , durch welche die Schnittlinien der Hilfsebenen mit den Pyramidenflächen parallel zu qr hindurch gehen; sie schneiden auf den Pyramidenkanten die gesuchten Schnittpunkte a , b bis e aus. Die vollständige Schnittfigur besteht somit aus dem Vieleck a, b, c, d, e , von welchem jedoch nur der innerhalb der Dreiecksseiten liegende Teil als wirkliche Schnittfigur zu gelten hat.

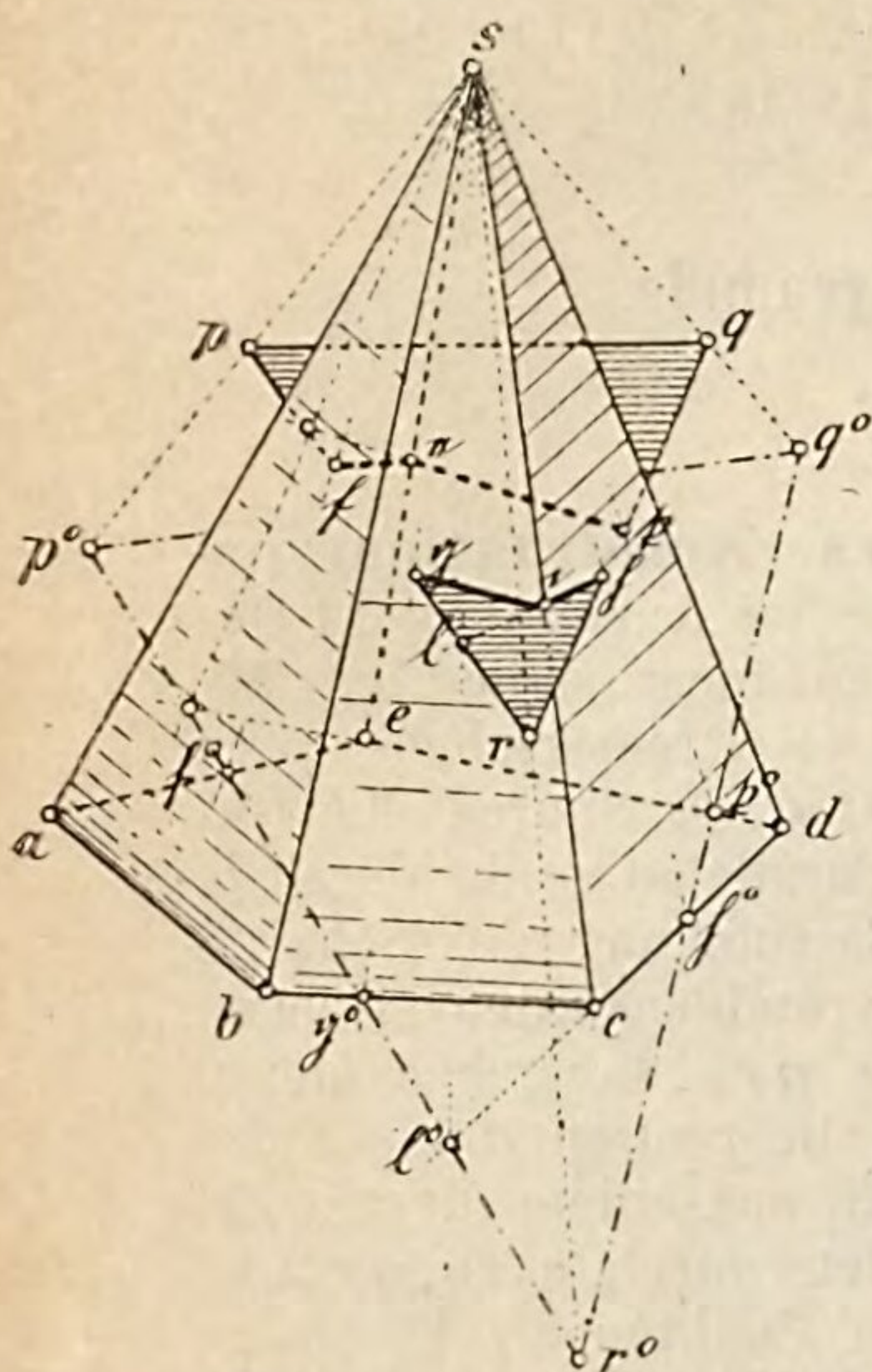
Figur 50.

Figur 50 a.

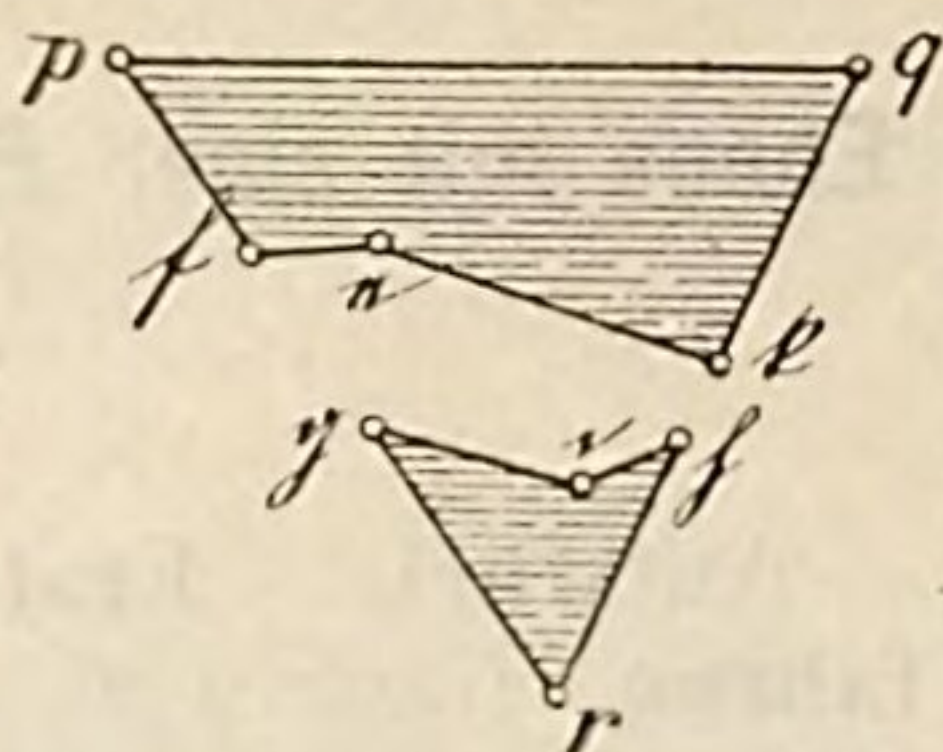


Die Figur 50a zeigt, in welcher Weise das Dreieck pqr von der Pyramide durchschnitten wird.

Figur 51.



Figur 51 a.



Zweites Konstruktionsverfahren. Um zunächst die Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit den Pyramidenflächen zu erhalten, denke man sich durch die Pyramidenspitze s und je eine Dreiecksseite Ebenen gelegt und deren (erste) Spuren p^0q^0 , p^0r^0 und q^0r^0 aufgesucht. Diese treffen die Spuren der Pyramidenflächen in Punkten $f^0, g^0, h^0, i^0 \dots$, durch welche die Schnittlinien der Hilfsebenen mit den Pyramidenflächen hindurch gehen und die Dreiecksseiten in den gesuchten Schnittpunkten f, g, h, i treffen.

Mittels der nämlichen Hilfsebenen ergeben sich aber auch die Schnittpunkte der Pyramidenkanten mit der Dreiecksfläche, z. B. der Schnittpunkt c mit der Pyramidenkante sc .

Die Pyramidenfläche scd , deren Spur cd ist, durchschneidet nämlich die beiden Ebenen sqr und srp nach zwei Geraden, gehend durch die Schnittpunkte h^0 und i^0 der Spuren der in Betracht kommenden drei Ebenen und die Linien sh^0 und sl^0 liefern in der Ebene pqr die Punkte h und i , deren Verbindungsline hi auf sc den Punkt c ausschneidet.

In Figur 51a ist wieder das durch die Pyramide durchschnitene Dreieck dargestellt.

Anmerkung 15. Man führe die beiden in den Antworten auf die Fragen 23 und 24 erläuterten Konstruktionen nunmehr in rechtwinkliger Projektion auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 in der Projektionszeichnung durch.

Die beiden in den Antworten der Fragen enthaltenen Konstruktionsverfahren hängen insofern zusammen, als beim ersten Verfahren sowohl die Pyramide wie auch die gegebene Ebene parallel zur Geraden qr in die **Pr. Eb.** projiziert wurde, siehe Antw. der Fragen 2 u. 5, I. Teil, im zweiten Verfahren dagegen eine centrale Projektion von Pyramide und Ebene durch die Pyramidenspitze in die **Pr. Eb.** E_1 zur Konstruktion Benützung fand. Im ersten Fall stellen die Punkte $a^0, b^0, \dots$ die Parallelprojektionen, im zweiten Fall die Punkte $f^0, g^0 \dots$ die Centralprojektionen der gesuchten Schnittpunkte dar.

b) Schnitt einer begrenzten Ebene mit einem Prisma.

Frage 25. Wie konstruiert man zweckmässig den Schnitt einer ebenen Figur, etwa eines Dreiecks pqr mit einem Prisma?

Antwort. Erstes Konstruktionsverfahren. Es entspricht dem ersten Konstruktionsverfahren in Antwort auf Frage 24.

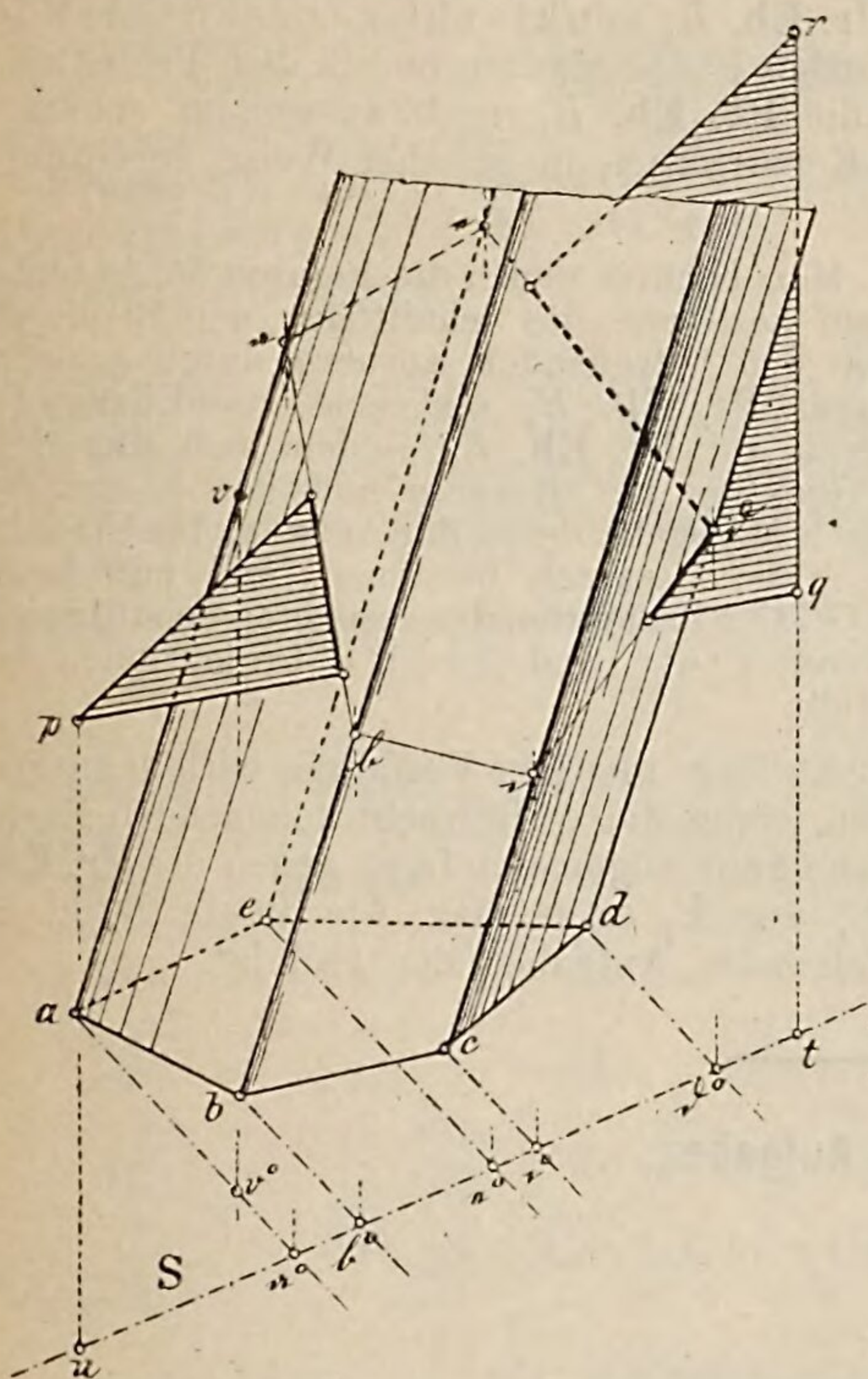
Man denke sich nämlich, siehe Figur 52, die erste Spur S_1 der Ebene pqr konstruiert und durch die Prismenkanten Ebenen gelegt parallel zu einer Geraden, etwa gleich qr der Ebene, so treffen die Spuren dieser Hilfsebenen die Spur S_1 in Punkten $a^0 \dots e^0$, durch welche die Schnittlinien der Hilfsebenen mit den Prismenflächen parallel zu qr hindurch gehen und auf den Prismenkanten die Schnittpunkte a bis e liefern. Hierbei hat als eigentlicher Schnitt nur der innerhalb der Begrenzung des Dreiecks liegende Teil desselben zu gelten.

Zur Bestimmung der Spurrichtung der Hilfsebenen ist auf einer Prismenkante, etwa auf jener durch a ein Punkt v beliebig zu wählen und durch ihn eine Parallele zur Prismenrichtung zu ziehen. Die Spur v^0 dieser Parallelen verbunden mit a , gibt die Spur av^0 der Hilfsebene avv^0 .

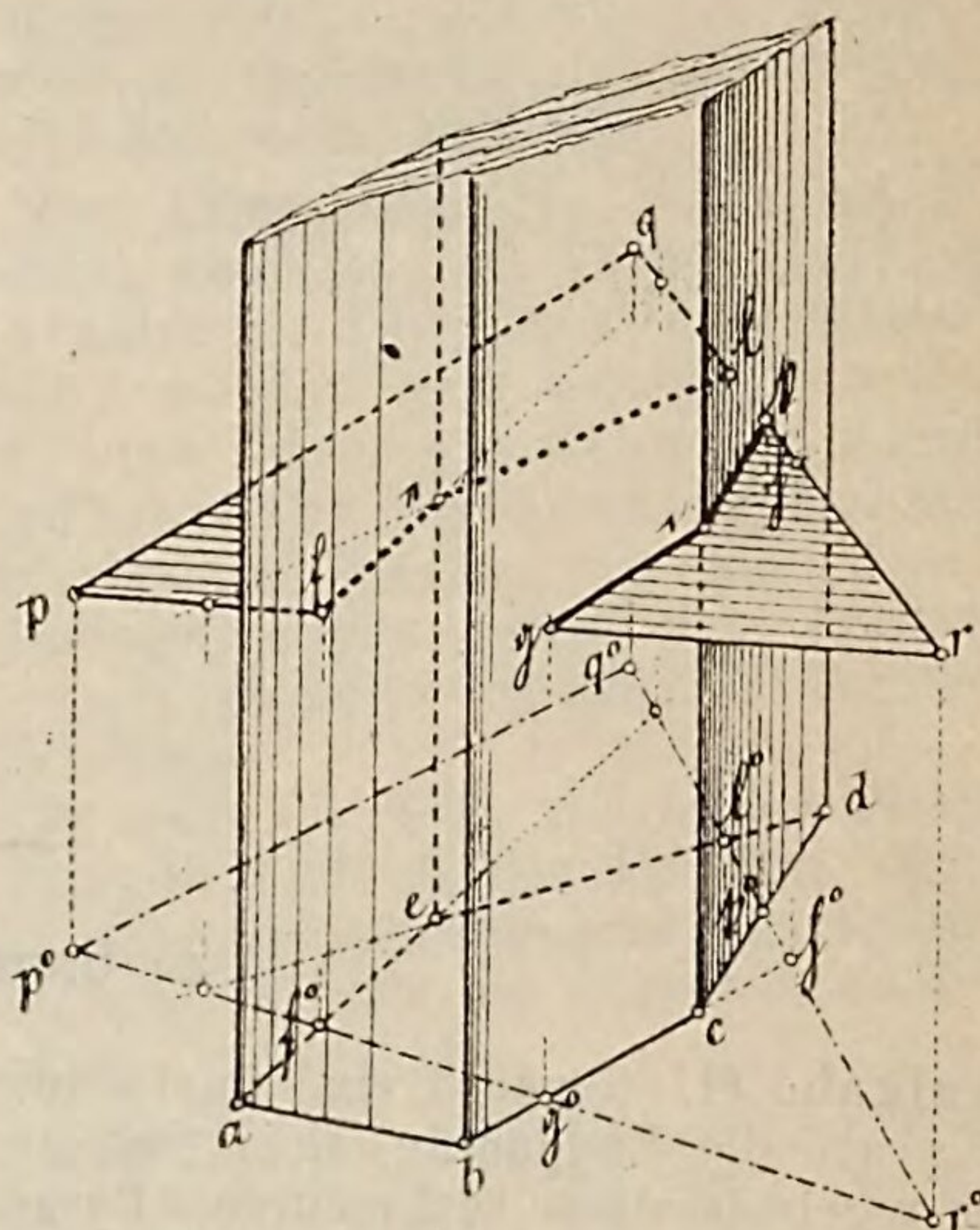
Zweites Konstruktionsverfahren. Es entspricht dem zweiten Konstruktionsverfahren der Antwort auf Frage 24.

Man denke sich, siehe Figur 53, durch die Seiten der Dreiecksebene Hilfsebenen parallel zur Prismenrichtung gelegt, so treffen deren Spuren p^0q^0 , q^0r^0 und p^0r^0 die Spur des Prismas in Punkten f^0 , g^0 , f^0 , l^0 , durch welche die Schnittlinien der Hilfsebenen mit den Prismenflächen parallel zur Prismenrichtung hindurchgehen und auf den Dreiecksseiten die Schnittpunkte f , g , f , l liefern.

Figur 52.



Figur 53.



Aber auch die Schnittpunkte der Prismenkanten mit den Dreiecksflächen sind in gleicher Weise zu bestimmen. Die Figur 53 zeigt die Konstruktion für den Punkt c : Die Spur bc der Prismenfläche bc schneidet die Spuren p^0r^0 und r^0q^0 in den Punkten g^0 , h^0 , denen auf den Dreiecksseiten pr und rq die Punkte g und h entsprechen, deren Verbindungslinie auf der Kante durch c den Punkt c ausschneidet.

Anmerkung 16. Man führe die beiden in der Antw. der Frage 25 erläuterten Konstruktionen nunmehr in rechtwinkliger Projektion auf die **Pr. Eb.** E_1 und E_2 in der Projektionszeichnung durch.

Die beiden Konstruktionsverfahren hängen wieder in soferne zusammen, als im ersten Fall sowohl Prisma wie Ebene parallel zu einer Geraden der letzteren, in die **Pr. Eb.** projiziert wurden, beim zweiten Konstruktionsverfahren dagegen lediglich das Dreieck pqr parallel zur Prismenrichtung in die **Pr. Eb.** zu projizieren war.

Im ersten Fall kannte man die Parallelprojektion der Ebene in deren Spur, im zweiten Fall dagegen die Parallelprojektion des Prismas gleichfalls in dessen Spur unmittelbar.

Anmerkung 17. Die Aufgabe des Auffindens des Schnittes einer Ebene, gleichgültig, ob unbegrenzt oder begrenzt, mit einem der Körper „Pyramide und Prisma“ lässt noch eine andere Lösung zu, als bisher angegeben wurde.

In dem Fall der Antwort auf Frage 14, sowie in den Fällen 1a und 2a der Antwort auf Frage 21 erhält man, da die schneidende Ebene eine projizierende ist, die eine Projektion der Schnittfigur unmittelbar als gerade Durchschnittslinie der Projektion der Ebene mit der Projektion des in Rede stehenden Körpers.

Hat nun aber die schneidende Ebene eine ganz allgemeine Lage gegen die **Pr. Ebn. E_1** und E_2 , so kann man mittels einer neuen **Pr. Eb. E_1** senkrecht zur schneidenden Ebene die gegebene Ebene zur projizierenden Ebene machen und in dem Projektions-system I—IV oder II—IV, je nachdem die **Pr. Eb. E_1** noch ausserdem senkrecht zur **Pr. Eb. E_1** oder E_2 gewählt ist, die Konstruktion in gleicher Weise durchführen wie in den oben angezogenen Fällen.

Man benütze gleich die Figuren 34, 43 und 45 und bestimme die Schnittfigur der Ebene ST mit den betreffenden Körpern durch Annahme einer **Pr. Eb. E_1** senkrecht zur Ebene ST , sowie zur **Pr. Eb. E_1** , indem man die vierte Projektion des Körpers und der Ebene ST , nach Massgabe des in der Antw. a. der Frage 86, I. Teil, Gesagten bestimmt, und mittels der vierten Projektion der gesuchten Schnittpunkte deren erste und zweite Projektionen herstellt.

Zu dem gleichen Verfahren wird man greifen, wenn die in Betracht kommenden Körper eine ganz allgemeine Lage gegen die **Pr. Ebn. E_1** und E_2 einnehmen, wie dies z. B. in den folgenden Aufgaben der Fall ist.

c) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 41. Gegeben sind zwei Punkte a und s als die Endpunkte einer Seitenkante einer regelmässigen sechsseitigen Pyramide, deren Achse unter 45° gegen die **Pr. Eb. E_1** geneigt ist und deren Grundkanten halb so gross sein sollen als die Seitenkanten. Durch den Halbpunkt der Höhe der Pyramide ist eine Ebene zu den **Pr. Ebn. E_1** und E_2 unter gegebenen Winkeln geneigt zu legen, und ihr Schnitt mit der Pyramide aufzusuchen.

Aufgabe 42. Drei windschiefe Gerade A, B, C sowie drei Punkte a, b, c sind gegeben. Es soll der Schnitt des Dreiecks abc mit dem durch die Kanten A, B, C bestimmten vierseitigen Prisma (Parallel-epiped) konstruiert werden, siehe auch Aufgabe 97, I. Teil.

4) Ueber die Bestimmung des Schnittes zweier der Körper „Prisma“ und „Pyramide“.

Anmerkung 18. Bei der Bestimmung des Schnittes zweier Polyeder besteht das Konstruktionsverfahren im allgemeinen stets darin, dass man nacheinander die Schnittpunkte der Kanten eines jeden der Polyeder mit den Flächen des anderen aufsucht.

Man erhält auf diese Weise eine Reihe von Punkten, welche zu einem im allgemeinen windschiefen Vielecke, der Schnittfigur, zu verbinden sind. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Verbindungslinie zweier Schnittpunkte nur dann der Schnittfigur angehört, wenn sie als Schnittlinie zweier Flächen der Polyeder erscheint.

A) Schnitt zweier Prismen.

Frage 26. Wie konstruiert man zweckmässig die Schnittfigur zweier Prismen?

Erkl. 56. Was die Reihenfolge der Verbindung der Punkte zur Schnittfigur anbetrifft, so erhält man dieselbe in Befolgung der in Anmerkung 18 genannten Regel sehr einfach wie folgt:

Prisma I		Prisma II	
Flächen	Punkte	Flächen	Punkte
<i>ab</i>	1, 2, 3, 4	<i>ef</i>	4, 2, 7, 8
<i>bc</i>	3, 4, 8, 12, 10	<i>fg</i>	7, 8, 6, 9, 10
<i>cd</i>	9, 5, 6	<i>gh</i>	9, 10, 5, 11, 12
<i>da</i>	5, 6, 11, 7, 1, 2	<i>he</i>	11, 12, 1, 3
Verbindungs-Reihenfolge:	1, 3, 12, 10, 8, 4, 2, 7, 6, 9, 5, 11, 1		

Man verzeichne sich die nebenstehende Tabelle, in welcher die Flächen beider Prismen enthalten sind und schreibe die in den einzelnen Flächen beider Prismen befindlichen Punkte, wie die Tabelle zeigt, zusammen.

Geht man nun von einem beliebigen Punkte, etwa gleich vom Punkte 1 aus, so liegt derselbe einmal in der Fläche *ab* des Prismas I und kann in dieser Fläche verbunden werden sowohl mit dem Punkte 3 als auch mit 4 (mit 2 ist eine Verbindung nicht möglich, weil beide Punkte 1 und 2 einer Prismenkante angehören). Sieht man nun in der Tabelle bei den Flächen des Prismas II, ob die Punktpaare 1, 3 oder 1, 4 je in einer Fläche vereinigt sind, so findet man in der That in der Fläche *he* die Punkte 1 und 3 liegend, dagegen ist 1—4 in keiner Fläche des Prisma II anzutreffen. Die Linie 1—3 ist somit eine Gerade der Schnittfigur, nämlich die Schnittlinie der Seitenflächen *ab* und *he*.

Antwort. Mit Bezugnahme auf das in Anmerkung 18 Gesagte wird man nacheinander die Schnittpunkte sämtlicher Prismenkanten mit den Flächen des anderen Prismas aufsuchen und die Schnittpunkte zweckentsprechend verbinden, siehe Erkl. 56.

Zur Aufsuchung der genannten Schnittpunkte wählt man mit Vorteil Hilfsebenen parallel zu den Kanten beider Prismen, welche von dem einen Prisma je eine Kante enthalten und das andere nach Geraden parallel zu dessen Seitenkanten treffen, die aus der in der nämlichen Ebene befindlichen Prismenkante Schnittpunkte beider Prismen ausschneiden.

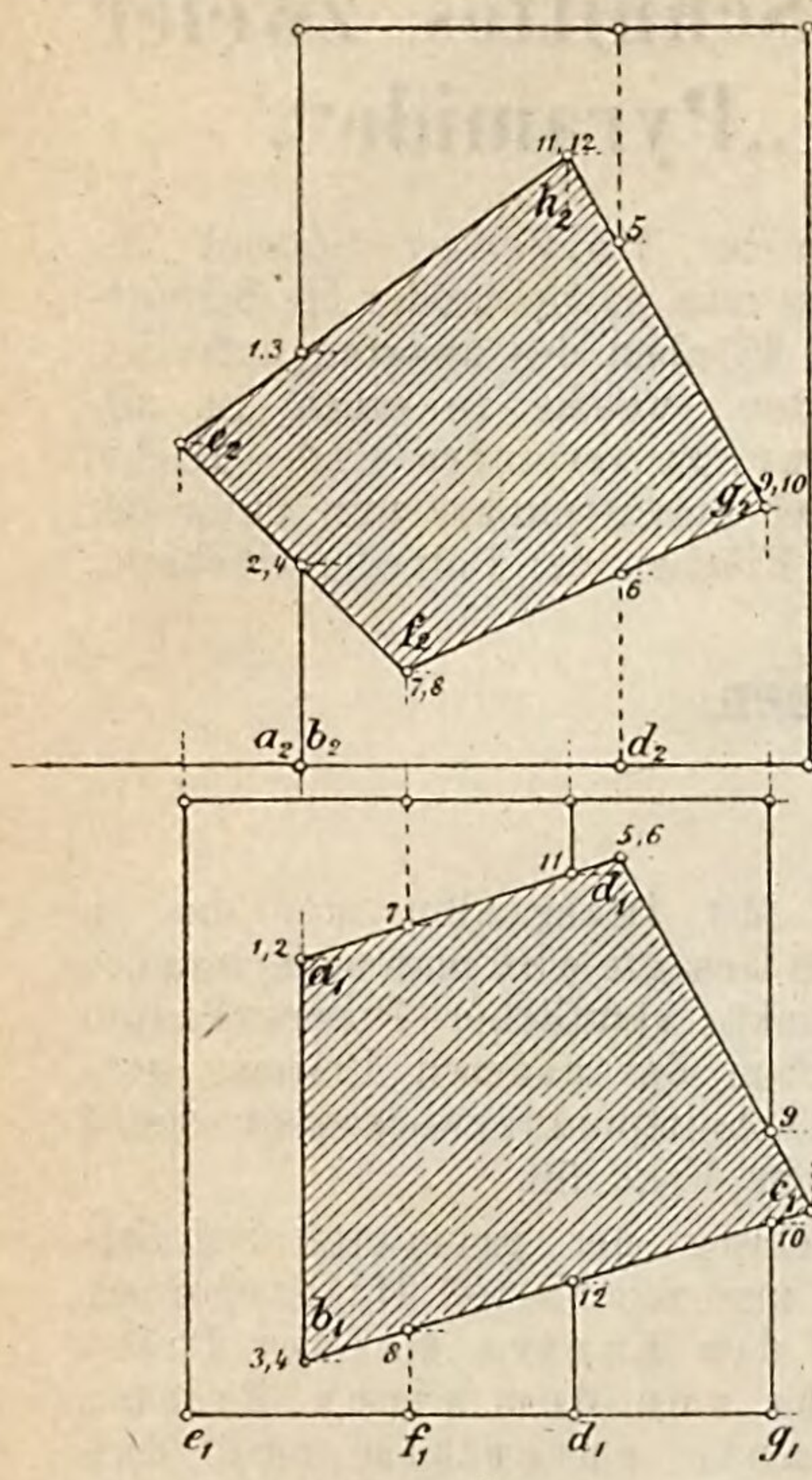
Je nach der Lage der beiden Prismen zu einander und zu den **Pr. Ebn.** vereinfacht sich das spezielle Konstruktionsverfahren wesentlich, wie dies die folgenden Fälle zeigen sollen.

Fall 1. Jedes der beiden Prismen stehe auf einer **Pr. Eb.** senkrecht, siehe Figur 54.

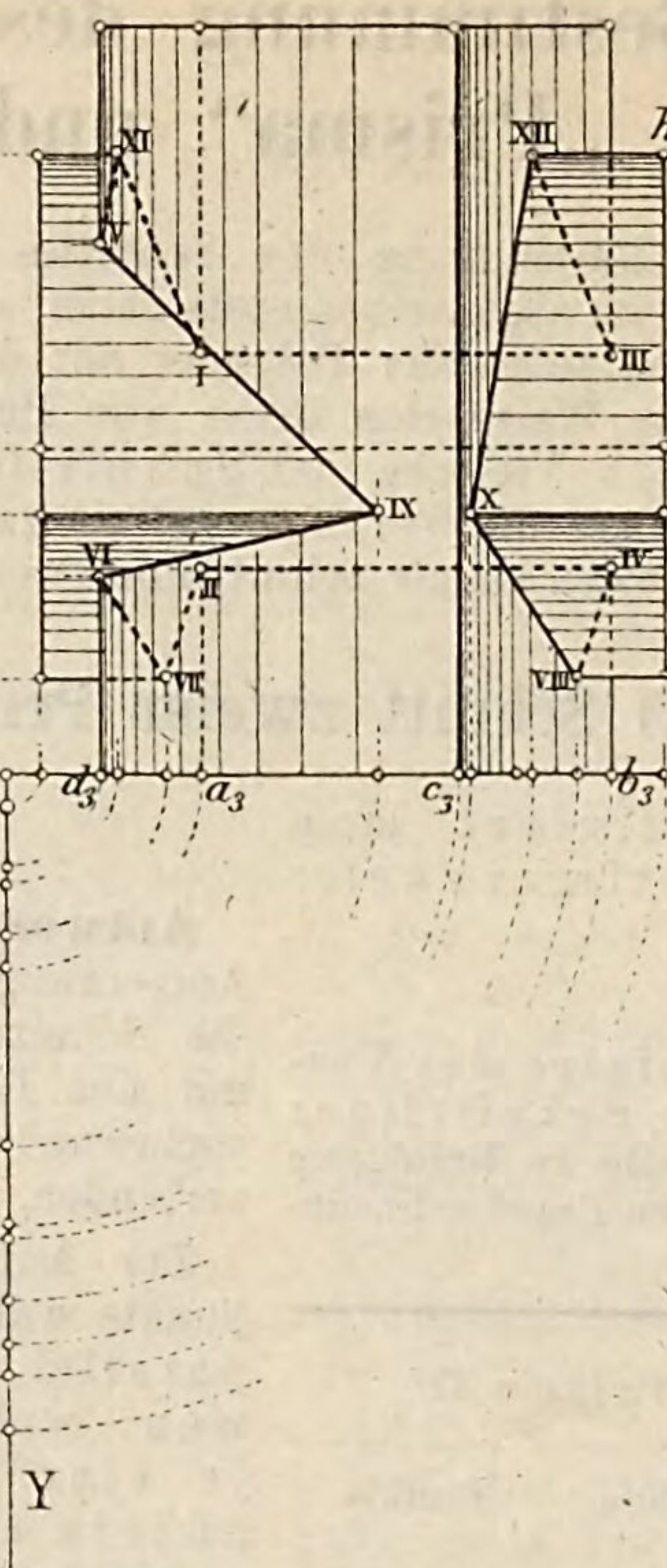
In diesem Fall sind die Projektionen der Schnittfigur beider Prismen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 schon gezeichnet und decken sich mit den bezüglichen Projektionen der Prismen.

Will man aber doch eine Ansicht der Schnittfigur gewinnen, so bestimme man eine Projektion beider Prismen auf die **Pr. Eb.** E_3 , siehe Figur 54a, und ermittle zugleich die dritten Projektionen der Schnittpunkte der einzelnen Prismenkanten mit den Flächen des anderen Prismas. In der Projektionszeichnung, siehe Figur 54 und 54a, sind diese Punkte in der ersten und zweiten Projektion mit arabischen, in der dritten Projektion mit römischen Ziffern bezeichnet.

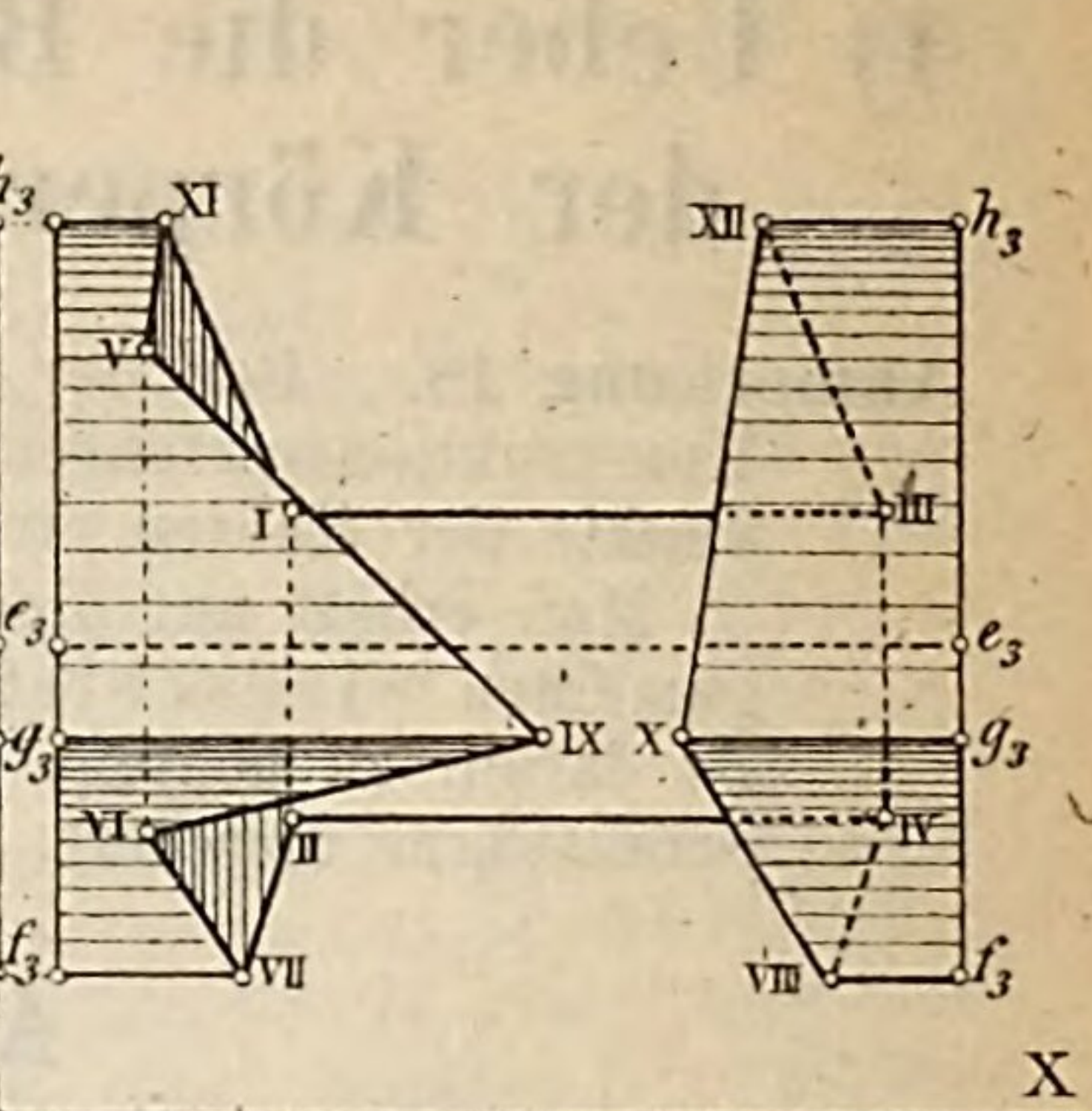
Figur 54.



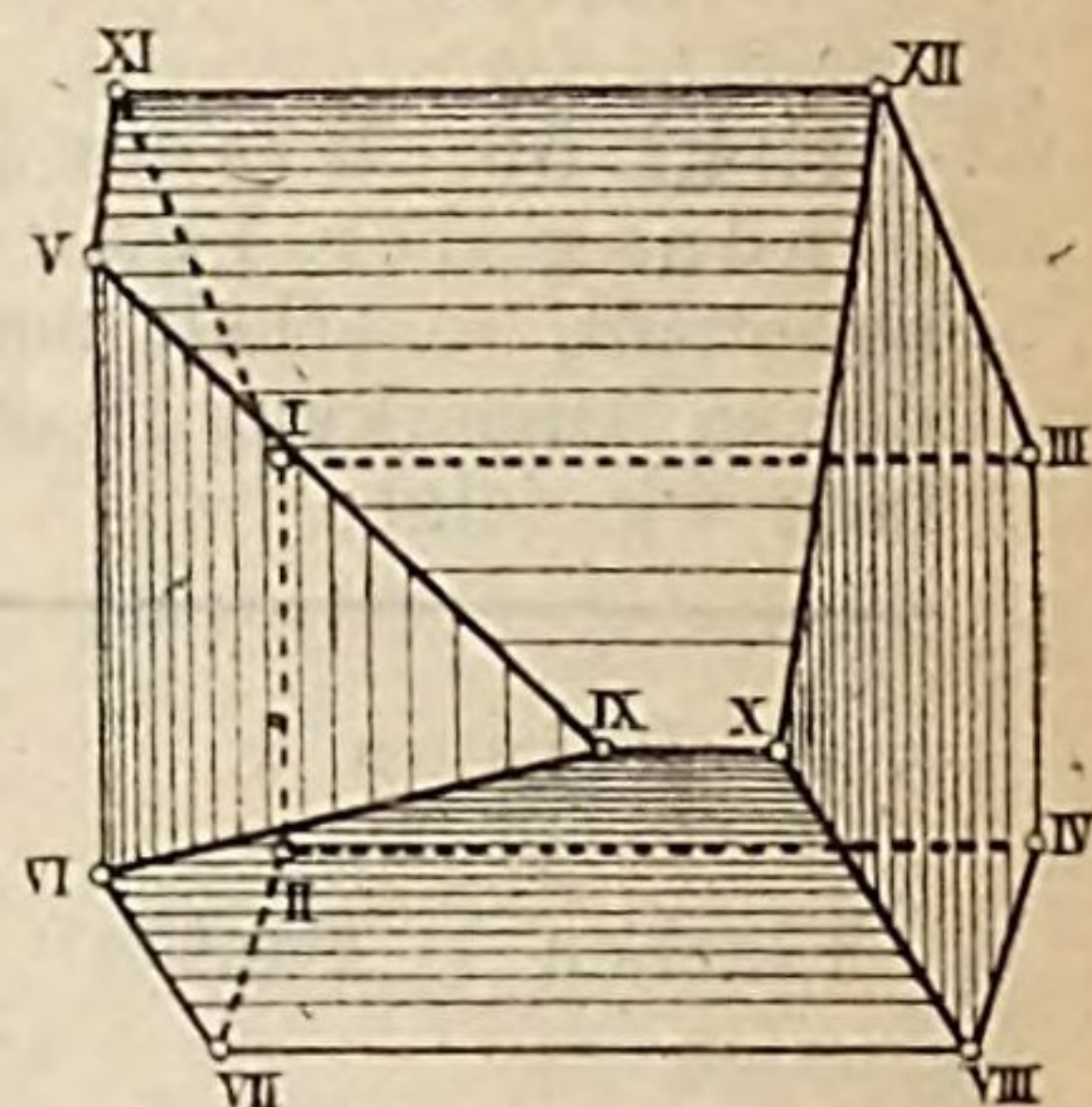
Figur 54a.



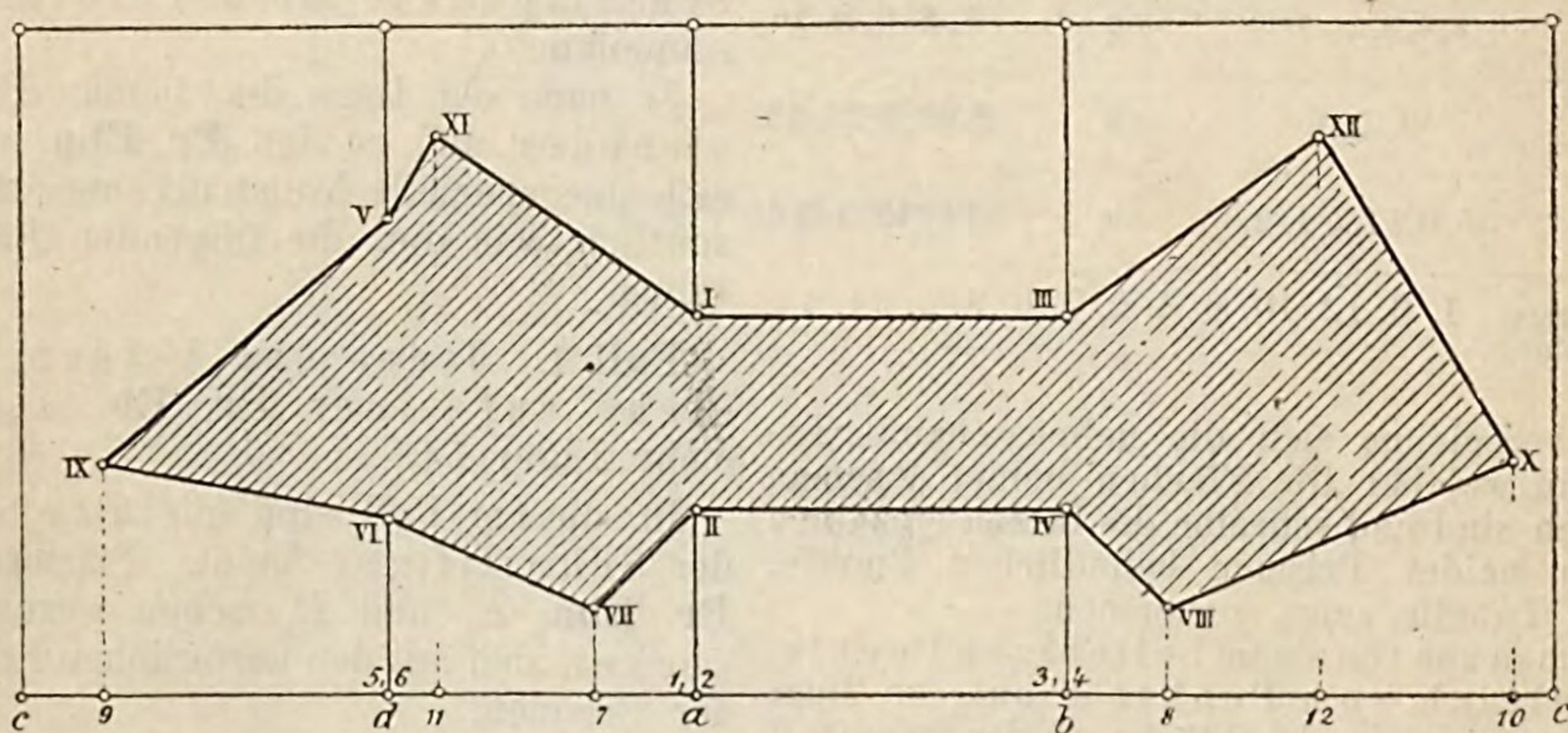
Figur 54b.



Figur 54c.



Figur 54d.



Nun gehe man in der Fläche he weiter, so kann man in derselben Punkt 3 verbinden mit 11 oder 12; für das Prisma I finden sich in der Fläche bc gleichfalls die Punkte 3 und 12, somit ist 3—12 eine weitere Verbindungsgerade. In der Fläche he gibt es eine weitere Verbindung nicht mehr, weshalb man in der Fläche bc weiter zu verbinden sucht und in der That findet, dass die Punkte 12—10 auch in der Fläche hg des Prismas II vorhanden sind; man hat also als weitere Verbindung die

Linie 12—10. In der Fläche bc kann man aber ausserdem noch 10—8 verbinden, denn diese Punkte finden sich gleichzeitig in der Fläche fg des Prismas II vereinigt; endlich gehört der Fläche bc noch die Verbindung 8—4 an, da diese Linie auch in der Fläche ef des Prismas II liegt. Eine weitere Verbindung ist in der Fläche bc nicht mehr vorhanden; man geht daher in der Fläche ef weiter und findet zunächst die Verbindung 4—2, welche Linie auch in der Fläche ab liegt; in der Fläche ef ist aber zugleich noch die Verbindung 2—7 möglich, mit Rücksicht auf die Fläche da des Prismas I. Da es in Fläche ef eine weitere Verbindung nicht mehr gibt, so gelangt man in Fläche da vom Punkt 7 nach 6, denn diese Linie gehört auch zur Fläche fg . In Fläche da ist eine weitere Verbindung nicht mehr möglich, dagegen gelangt man in Fläche fg vom Punkte 6 nach 9, welche Linie auch zur Fläche cd gehört; in dieser Fläche findet sich noch ausserdem die Linie 9—6, dieselbe liegt auch in Fläche gh . In letzterer Fläche findet man noch die Linie 5—11, zugleich der Fläche da angehörend, in welcher man schliesslich wieder zu dem Ausgangspunkte 1 (Linie 11—1 liegt auch in Fläche he) zurückkehrt.

Erkl. 57. Kommt man auf die durch Erkl. 56 erläuterte Weise auf den Ausgangspunkt zurück, ohne die sämtlichen Punkte der Schnittfigur berührt zu haben, so ist dies ein Anhaltspunkt dafür, dass zwei Schnittfiguren vorhanden sind, siehe auch Erkl. 60. Im vorliegenden Beispiele ist dies nicht der Fall, man erhält vielmehr nur eine geschlossene Schnittfigur, deren Punkte in der durch die Tabelle festgesetzten Reihenfolge zu verbinden sind.

Erkl. 58. Bei jeder Schnittfigur zweier Körper kann und wird es im allgemeinen auch vorkommen, dass nicht alle Punkte derselben in Rücksicht auf den in Erkl. 179 a, I. Teil, angegebenen Standpunkt des Beobachters sichtbar erscheinen, sondern dass gewisse Linien auf unsichtbaren Flächen sich befinden, daher auch unsichtbar sein werden.

In der Projektionszeichnung sollen solche unsichtbaren Linien, desgleichen auch die unsichtbaren Körperkanten mit unterbrochenen Strichen gezeichnet werden. Die zwischen dem Ein- und Austrittspunkte gelegenen Stücke der Körperkanten sollen in der Projektionszeichnung ganz weggelassen werden.

Erkl. 59. Eine Linie der Schnittfigur ist stets sichtbar, wenn sie bezüglich beider Körper in sichtbaren Flächen sich befindet.

Als sichtbare Flächen erscheinen nun in dem in den Figuren 54 und 54a dargestellten Fall für die dritte Projektion die Flächen bc und cd des Prismas I, sowie die Flächen fg und hg des Prismas II. Somit sind alle in diesen Flächen befindlichen Seiten der Schnittfigur sichtbar.

Erkl. 56 a. Zur leichteren Uebersicht der bereits verbundenen Punkte ist es zweckmässig, letztere zu durchstreichen. In der Tabelle, siehe Erkl. 56, ist diese Durchstreichung ersetzt durch kleinere Ziffern, und zwar sind für die durchstrichenen Punkte des Prismas I kleinere und schwächer gehaltene Ziffern, für die durchstrichenen Punkte des Prismas II kleinere, aber etwas stärker gehaltene Ziffern gewählt. In der genannten Tabelle ist jedoch nur der Linienzug 1, 3, 12, 10, 8, 4 auf diese Weise hervorgehoben.

In der in Erkl. 56 erwähnten Tabelle wurde die Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit der Verbindungslinie zweier Punkte durch zusammenhängende bzw. unterbrochene Striche, welche unter der Zusammenstellung der Verbindungsreihenfolge angebracht sind, angedeutet.

Für die Folge soll diese Kennzeichnung der sichtbaren und unsichtbaren Verbindungslinien für die erste Projektion stets unter, für die zweite Projektion stets über der genannten Zusammenstellung angebracht werden.

Im vorliegenden Beispiele konnte die genannte Kennzeichnung für die dritte Projektion unter der Zusammenstellung angebracht werden, da in der ersten bzw. zweiten Projektion eine eigentliche Schnittfigur nicht existiert.

Erkl. 60. Schneiden sich zwei Körper nach einer zusammenhängenden, d. h. geschlossenen Schnittfigur, so soll ein derartiger Schnitt ein Anschnitt genannt werden, im Gegensatz zu einem vollständigen Durchschnitt, bei welchem der eine Körper von dem anderen gänzlich durchdrungen wird und der Schnitt aus zwei getrennten und geschlossenen Schnittfiguren besteht.

Erkl. 61. Um ein recht deutliches Bild über die Art und Weise zu erhalten, wie das Prisma geschnitten wird, ist in der Figur 54b das eine, senkrecht zur **Pr. Eb. E_2** stehende Prisma, mit Hinweglassung des anderen Prismas dargestellt, desgleichen ist in Figur 54c das beiden Prismen gemeinsame Körperstück besonders gezeichnet.

Erkl. 62. Sehr häufig verlangt man auch die Darstellung der Schnittfigur in dem Netze des Prismas. Die Zeichnung des Netzes ist für das Prisma II, mit Hinweglassung seiner Grundflächen, in Figur 54d ausgeführt und sind in demselben die Punkte der Schnittfigur eingetragen, einfach dadurch, dass man die auf den Grundkanten befindlichen Abschnitte, hervorgerufen von den durch die Punkte der Schnittfigur zu den Seitenkanten gezogenen Parallelen, auf den entsprechenden Grundkanten des Netzes herstellt, durch deren Endpunkte Parallele zu den Seitenkanten zieht und auf ihnen die Abstände der Punkte der Schnittfigur von der **Pr. Eb. E_1** abträgt.

Erkl. 63. Was die Verbindung der einzelnen Punkte zur Schnittfigur anbelangt, so kann man selbstverständlich auch hier das in Erkl. 56 geschilderte Verfahren einschlagen. Bei der Durchdringung zweier Prismen ist aber das in Erkl. 64 angegebene Verfahren zweckmässiger, weil einfacher.

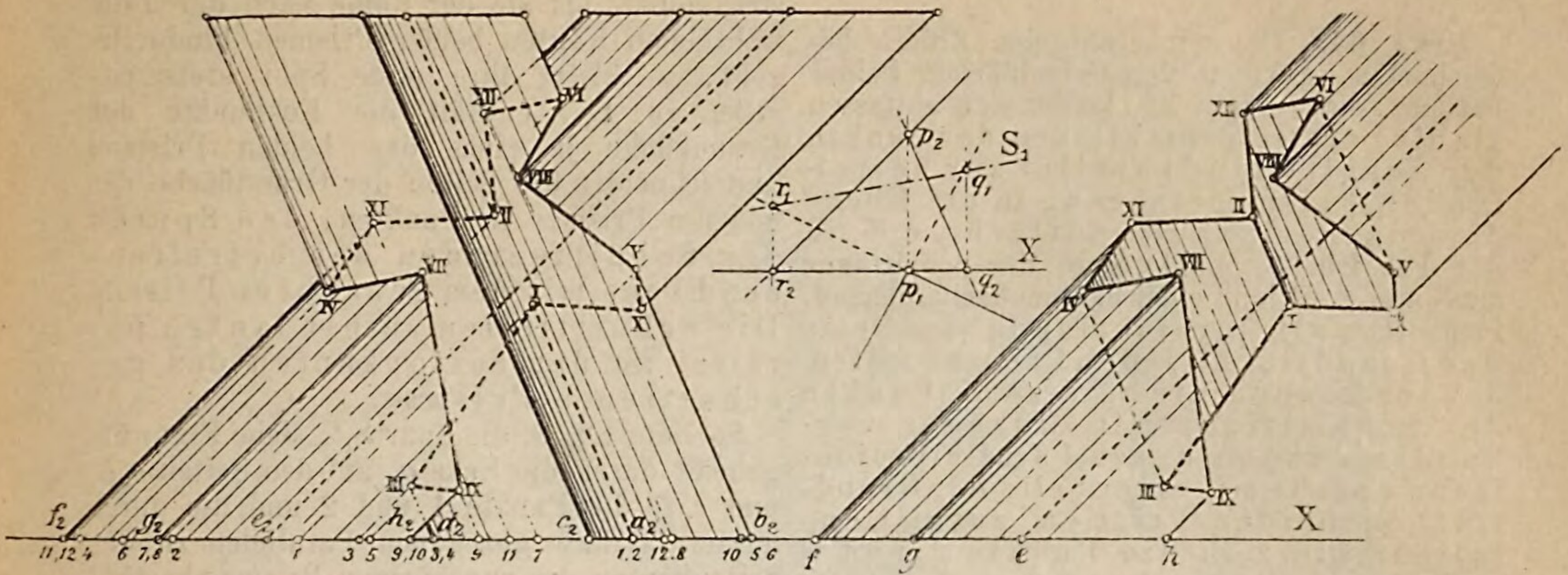
Fall 2. Beide Prismen liegen gegen die **Pr. Ebn. E_1** und E_2 beliebig; doch sollen ihre Grundflächen beide in der nämlichen **Pr. Eb.** etwa E_1 sich befinden.

Man zeichne durch einen beliebig gewählten Punkt p , siehe Figur 55a, eine Ebene parallel zu den Kanten beider Prismen, siehe Figur 55, und bestimme deren erste Spur $q_1 r_1 = S_1$.

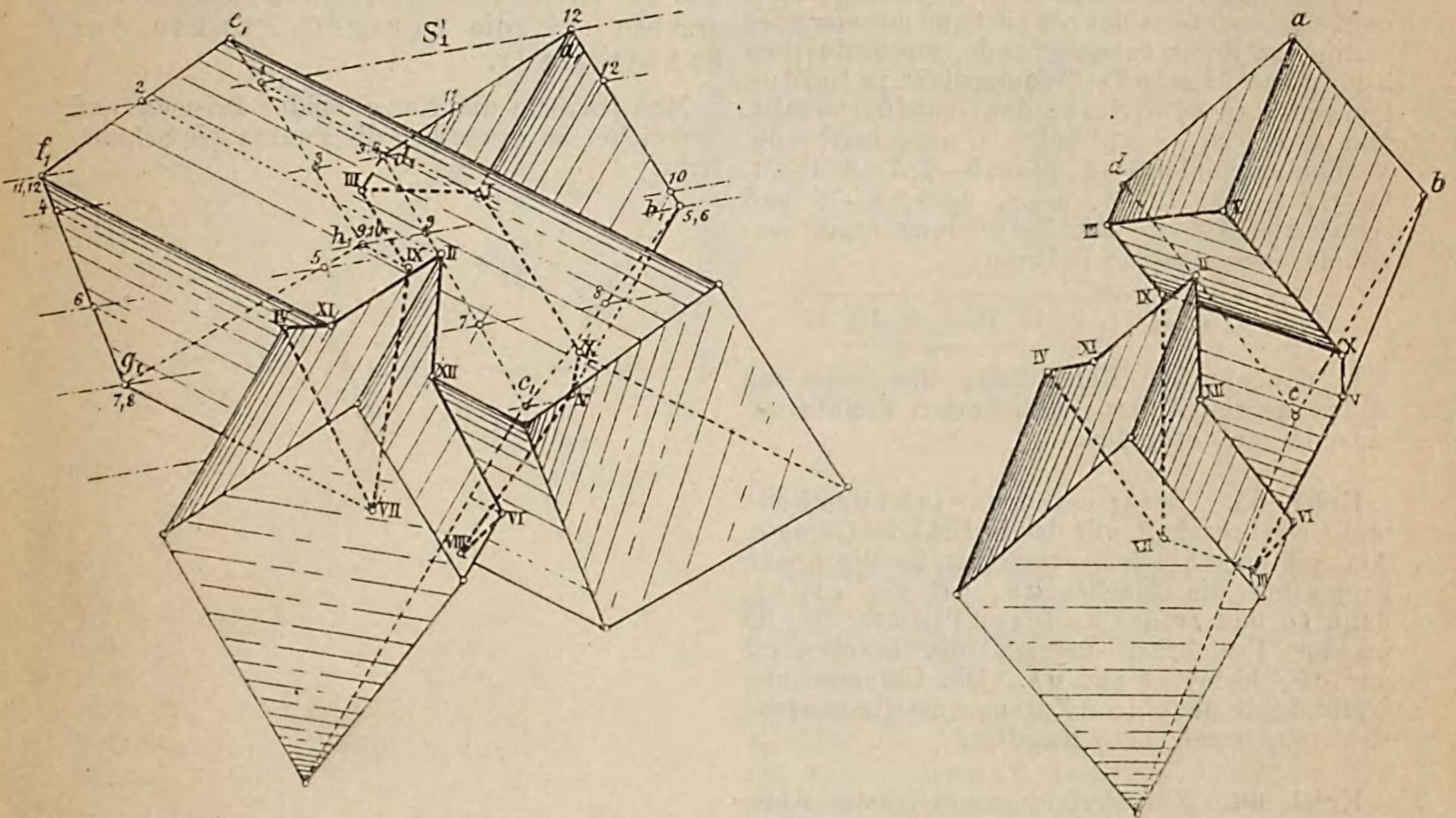
Figur 55.

Figur 55 a.

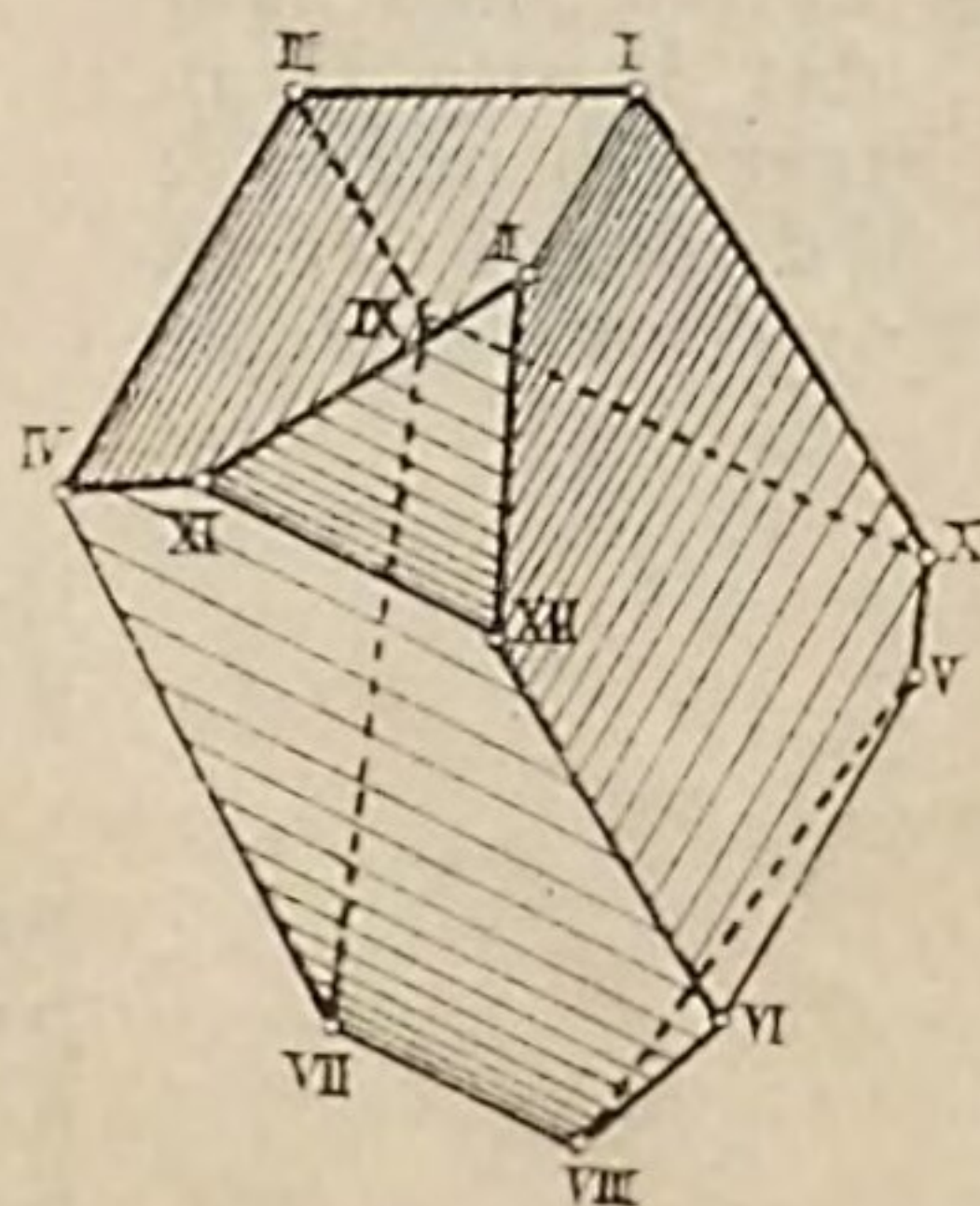
Figur 55 c.



Figur 55 b.



Figur 54 d.



Erkl. 64. Die mit arabischen Ziffern bezeichneten Punkte in den Grundflächen beider Prismen, siehe Figur 55, lassen sich auffassen als die Parallelprojektionen der Punkte der Schnittfigur parallel zur betreffenden Prismenrichtung in die Ebene der zugehörigen Grundfläche, d. h. in die **Pr. Eb. E_1** . Jede Seite der Schnittfigur muss nun, weil je in einer Prismenfläche liegend, in der Parallelprojektion in eine Seite der Grundfläche jeden Prismas fallen, d. h. es können niemals zwei Punkte der Schnittfigur mit einander verbunden werden, deren Parallelprojektionen nicht mit einer Seite der Grundflächen beider Prismen zusammenfallen, wie z. B. die Punkte 2 und 5 oder 1 und 6, oder 4 und 9 etc.

Geht man nun von den mit arabischen Ziffern bezeichneten Punkten aus, so kann man stets zwei solche Punkte der Schnittfigur mit einander verbinden, deren entsprechende, mit arabischen Ziffern bezeichnete Verbindungslinie in beiden Prismen in eine Seite der Grundfläche fällt. Man findet so, vom Punkte 1 ausgehend, die Verbindungslinien 1—3, 3—9, 9—7, 7—4, 4—11, 11—2, 2—12, 12—6, 6—8, 8—5, 5—10 und schliesslich 10—1. Die Verbindung ergibt somit das geschlossene Polygon:

1, 3, 9, 7, 4, 11, 2, 12, 6, 8, 5, 10, 1.

In der gleichen Reihenfolge sind auch die mit römischen Ziffern bezeichneten Punkte mit einander zu verbinden.

Erkl. 65. Bezüglich der Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit gilt das in Erkl. 59 Gesagte. Als sichtbare Flächen erscheinen für die erste Projektion die Flächen ab , ad des einen, dann fg und fe des anderen Prismas; für die zweite Projektion dagegen die Flächen cd und cb , bzw. gf und qh . Die Untersuchung ergibt das in der obigen Zusammenstellung, siehe Erkl. 64, bezeichnete Resultat.

Erkl. 66. Zur Erzielung möglicher Klarheit über die Beschaffenheit des erfolgten Schnittes beider Prismen ist jedes einzelne derselben besonders gezeichnet worden, und zwar das Prisma I in erster, das Prisma II in zweiter Projektion, siehe Figur 55b und 55c; desgleichen ist in Figur 55d das beiden Prismen gemeinsame Körperstück dargestellt.

Verschiebt man nun die Ebene pqr parallel zu sich selbst, bis sie der Reihe nach durch die sämtlichen Kanten beider Prismen hindurchgeht, so bleibt ihre erste Spur stets parallel zu S_1 , enthält die Eckpunkte der Grundfläche je eines der beiden Prismen und schneidet die Seiten der Grundfläche des anderen Prismas in Punkten, den Spuren der Schnittgeraden der betreffenden Ebene mit dem genannten Prisma. Die Schnittlinien selbst laufen parallel zu den Seitenkanten des geschnittenen Prismas.

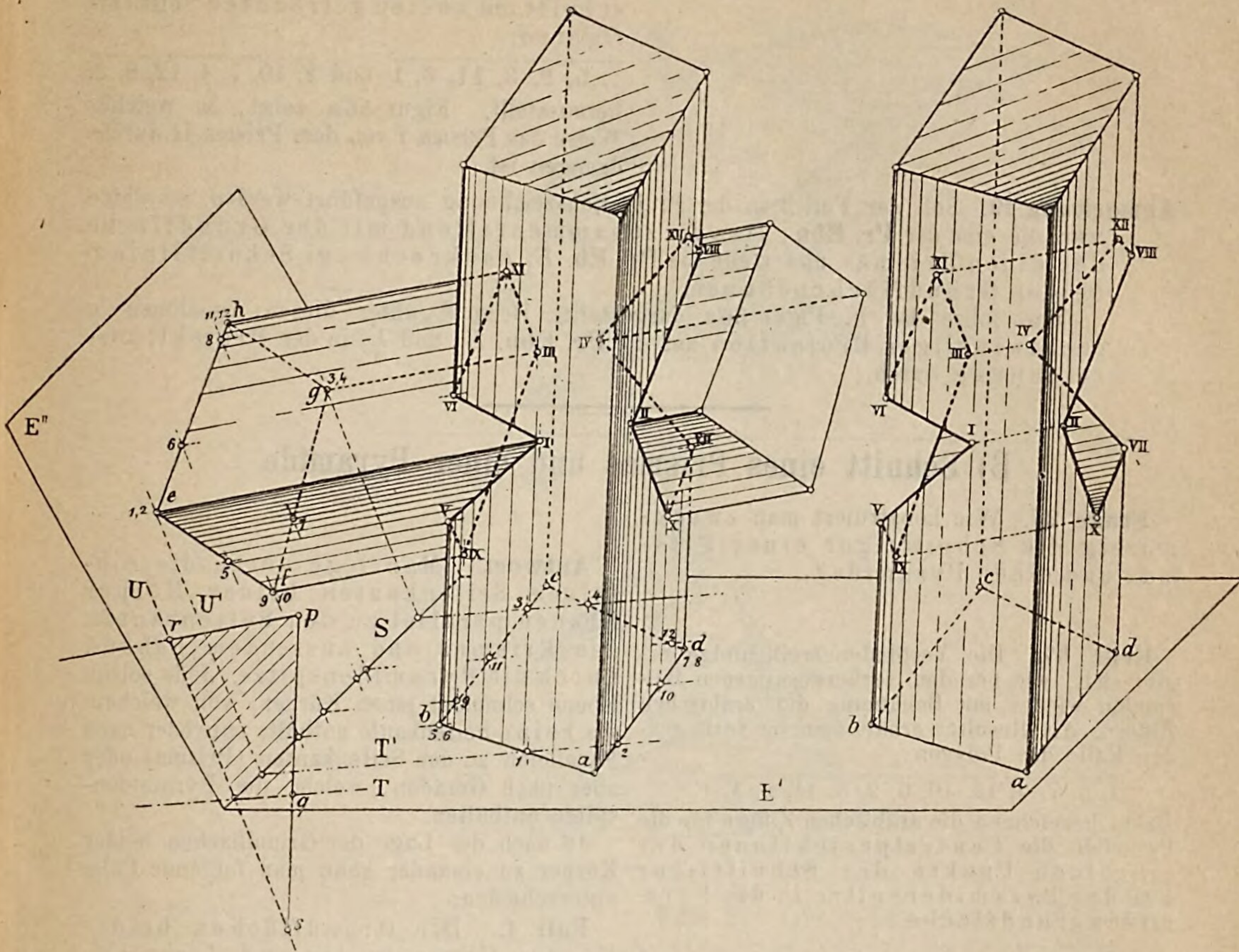
So liefert z. B. die Spur S_1' , siehe Figur 55, gehend durch die Ecke a_1 auf den Seiten e_1h_1 und e_1f_1 die Punkte 1 und 2 und die durch letztere Punkte gezogenen Parallelen zu den Seitenkanten des zugehörigen Prismas bestimmen auf der Seitenkante durch a die Punkte I und II der Schnittfigur. In gleicher Weise ergeben sich die übrigen Punkte der Schnittfigur.

Man ermittle die Netze beider Prismen und verzeichne in denselben die Punkte der Schnittfigur.

Fall 3. Beide Prismen liegen mit ihren Grundflächen in beliebigen Ebenen E' und E'' , siehe Figur 56.

Man lege wieder durch einen beliebig gewählten Punkt, siehe Figur 56, eine Ebene pqr parallel zu den Seitenkanten beider Prismen und bestimme deren Schnittlinien T und U mit den Ebenen E' und E'' .

Figur 56.



Verschiebt man nun die Ebene pqr parallel zu sich selbst, so dass sie nach einander die Kanten beider Prismen enthält, so laufen ihre Schnittlinien mit der Ebene E' parallel zur Linie T , jene mit der Ebene E'' parallel zu U und je zwei in einer Ebene liegenden Schnittlinien begegnen sich ausserdem auf der Schnittlinie S beider Ebenen E' und E'' .

So liefert z. B. die durch die Kante durch e gehende Ebene in E'' die Schnittlinie U' , in E' die Schnittlinie T' , welche ihrerseits in der Grundfläche des Prisma I die Punkte 1 und 2 bestimmt, durch welche die Schnittlinien der Ebene $U' T'$ mit dem Prisma I hindurchgehen und auf der Prismenkante durch e die Punkte I und II ausschneiden. In gleicher Weise bestimmen sich die übrigen Punkte der Schnittfigur.

Die Ermittlung der Verbindungsreihenfolge geschieht wieder nach dem in Erkl. 64 angegebenen Verfahren, wobei sich im vor-

liegenden Fall ein vollständiger Durchschnitt mit zweien getrennten Schnittfiguren:

1, 5, 9, 3, 11, 6, 1 und 2, 10, 7, 4, 12, 8, 2. herausstellt. Figur 56a zeigt, in welcher Weise das Prisma I von dem Prisma II durchdrungen ist.

Anmerkung 19. Soll der Fall 3 in der Projektionszeichnung ausgeführt werden, so wähle man die eine der **Pr. Ebn.**, etwa E_1 zusammenfallend mit der Grundfläche des einen Prismas und stelle die **Pr. Eb.** E_2 senkrecht zur Schnittlinie S beider Grundflächenebenen.

Man führe das in Figur 56a dargestellte Beispiel unter diesen Annahmen in rechtwinkliger Projektion auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 in der Projektionszeichnung durch.

B) Schnitt eines Prismas und einer Pyramide.

Frage 27. Wie konstruiert man zweckmässig die Schnittfigur eines Prismas und einer Pyramide?

Erkl. 67. Die Verbindungsreihenfolge ergibt sich, wie bei den vorhergegangenen Beispielen wieder mit Benützung der arabischen Ziffern. Als Resultat erhält man im vorliegenden Falle das Polygon:

1, 5, 7, 9, 12, 10, 6, 2, 3, 11, 8, 4, 1.

Dabei bezeichnen die arabischen Ziffern für die Pyramide die Centralprojektionen der einzelnen Punkte der Schnittfigur aus der Pyramidenspitze in die Pyramidengrundfläche.

Erkl. 68. Im vorliegenden Beispiele beteiligen sich die Grundflächen beider Körper am Schnitte, es geht demnach die Schnittfigur durch die Schnittpunkte a und b beider Grundflächenvielecke, siehe Figur 57 und 57a, und es gehört der unter der Ebene E_2 liegende Teil des Schnittes nicht mehr zur eigentlichen Schnittfigur. Figur 57a zeigt die durchschnittene Pyramide mit Hinzulassung des Prismas.

Antwort. Man lege durch die einzelnen Seitenkanten beider Körper Ebenen parallel zu den Seitenkanten des Prismas und ausserdem gehend durch die Pyramidenspitze. Jede solche Ebene schneidet jenen Körper, von welchem sie keine Seitenkante enthält, entweder nach Parallelen zu den Seitenkanten (Prisma) oder aber nach Geraden, welche die Pyramidenspitze enthalten.

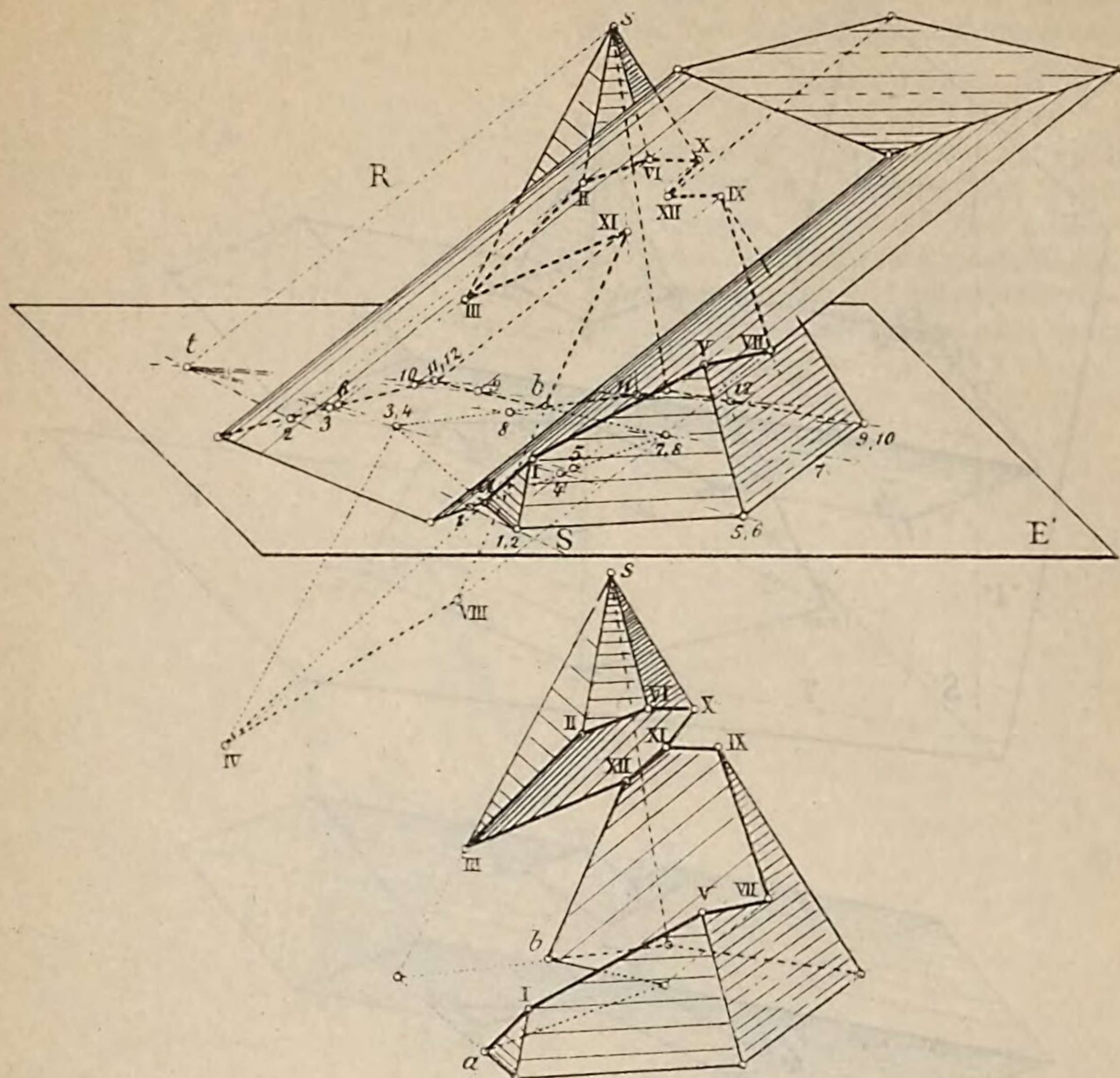
Je nach der Lage der Grundflächen beider Körper zu einander kann man folgende Fälle unterscheiden:

Fall 1. Die Grundflächen beider Körper liegen in ein und derselben Ebene E' , siehe Figur 57.

Die oben genannten Hilfsebenen enthalten sämtlich die durch die Pyramidenspitze s gezogene Parallele R zu den Prismenseitenkanten und schneiden die Ebene E' nach Geraden, gehend durch den Schnittpunkt t der Geraden R mit E' . Legt man ausserdem die Ebenen so, dass sie der Reihe nach durch die Prismen- bzw. Pyramidenkanten hindurchgehen, so enthalten ihre Schnittlinien mit E' die Ecken der Grundflächen von Prisma und Pyramide beziehungsweise. So liefert z. B. die durch die Pyramidenkante $s_{1,2}$ gehende Ebene eine Gerade S in E' , welche die Seiten der Prismengrundfläche in den Punkten 1 und 2 trifft, während die Ebene selbst aus dem Prisma die durch 1 und 2 hindurchgehenden Parallelen zu den Prismenseitenkanten heraus-schneidet, die ihrerseits auf der Kante $s_{1,2}$ die Punkte I und II der Schnittfigur liefern.

In ähnlicher Weise bestimmen sich die übrigen Punkte der Schnittfigur.

Figur 57 und 57 a.



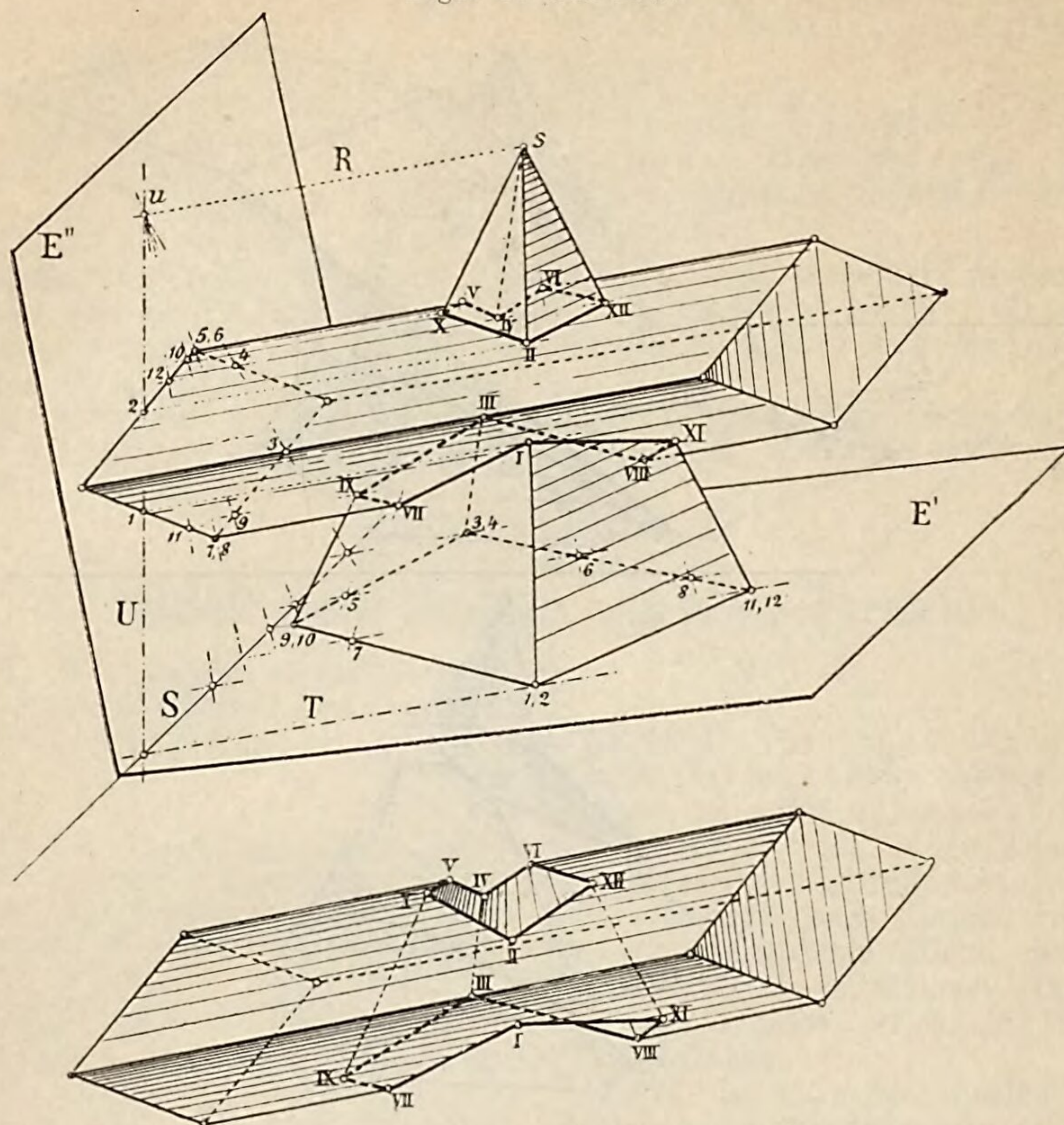
Fall 2. Die Grundflächen beider Körper liegen in verschiedenen Ebenen E' und E'' .

In diesem Falle wird man die Schnittpunkte t und u der Geraden R mit den Ebenen E' und E'' , siehe Figur 58, ermitteln, denn durch diese Schnittpunkte gehen offenbar die zur Konstruktion des Schnittes beider Körper zu benützenden Hilfsebenen.

Im vorliegenden Beispiele wurde die Prismenrichtung parallel zur Ebene E' gewählt, weshalb der Punkt t nicht vorhanden ist, es laufen vielmehr die Schnittlinien der Hilfsebenen mit E' parallel zur Prismenrichtung.

So schneidet z. B. die durch die Kante $s_{1,2}$ geführte Hilfsebene die Ebene E' nach der Geraden T , die Ebene E'' nach der Geraden U ; letztere Linie trifft die Seiten der Prismengrundfläche in zweien Punkten 1 und 2, durch welche parallel zur Prismenrichtung die Schnittlinien der Hilfsebenen mit dem Prisma hindurchgehen und auf der Pyramidenkante $s_{1,2}$ die Punkte I und II ausschneiden.

Figur 58 und 58 a.



Die übrigen Punkte des Schnittes, der im vorliegenden Falle aus zweien Vielecken:

1, 11, 8, 3, 9, 7, 1 und 2, 12, 6, 4, 5, 10, 2 besteht, bestimmen sich in ähnlicher Weise.

Die Verbindungsreihenfolge erkennt man wieder mit Zuhilfenahme der arabischen Ziffern, siehe Erkl. 64. Figur 58a zeigt das Prisma nach Hinwegnahme der Pyramide.

Anmerkung 20. Zur Ausführung der in Antwort der Frage 27 aufgeführten Fälle in der Projektionszeichnung wähle man die eine der **Pr. Ebn.**, etwa E_1 , zusammenfallend mit einer der Grundflächen, und stelle im **Fall 2** die **Pr. Eb. E_2** senkrecht zur Schnittlinie S beider Grundflächenebenen.

C) Schnitt zweier Pyramiden.

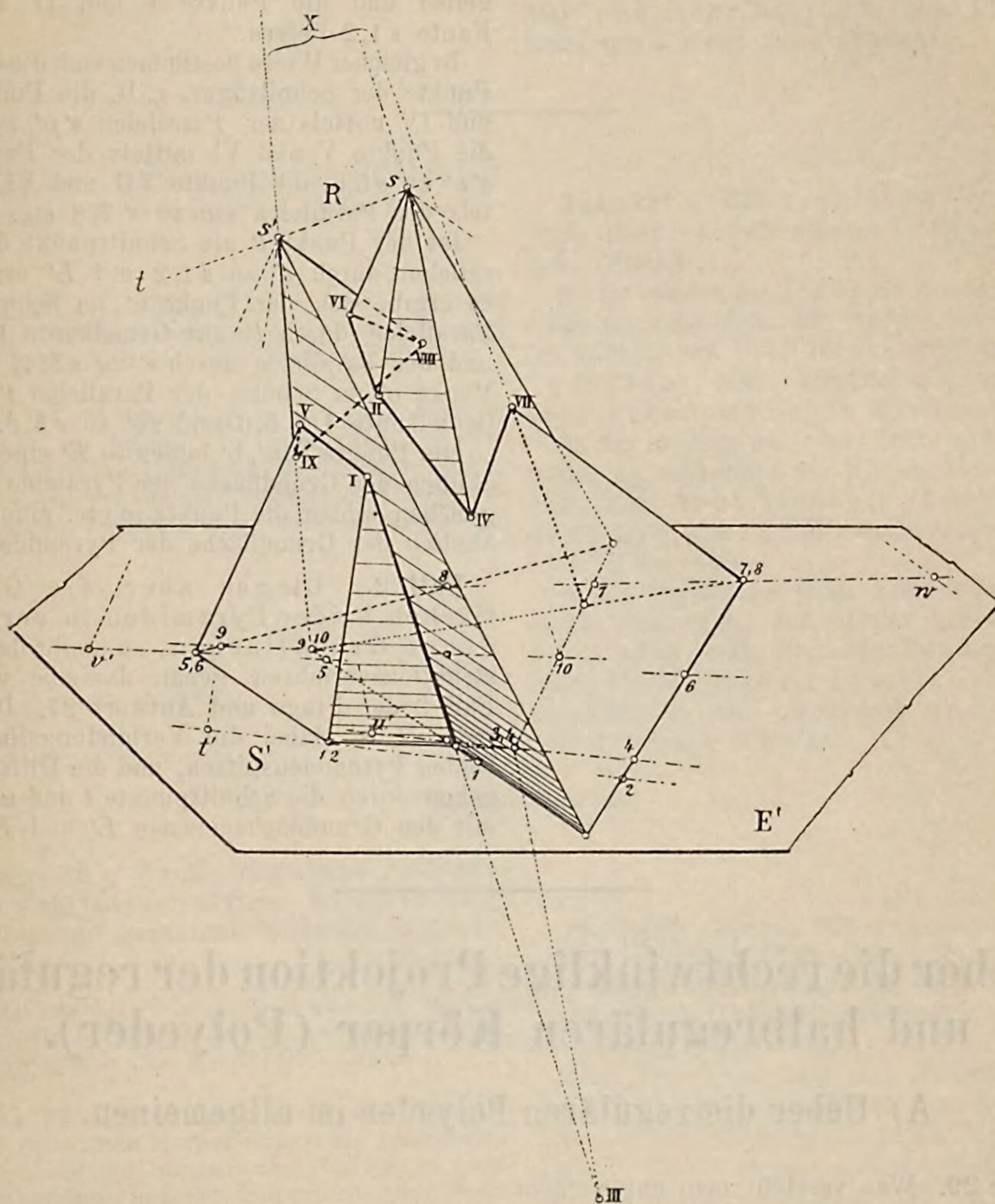
Frage 28. Wie ermittelt man zweckmässig die Schnittfigur zweier Pyramiden?

Antwort. Man lege durch die einzelnen Pyramidenkanten Ebenen, welche die beiden Pyramidenspitzen und folglich auch deren Verbindungs-

linie R enthalten, so schneiden dieselben die beiden Pyramiden nach Geraden, gehend durch die zugehörige Pyramidenspitze.

Fall 1. Liegen die Grundflächen beider Pyramiden in der nämlichen Ebene E' , so gehen die Schnittlinien aller der Hilfsflächen durch den Schnittpunkt t der Geraden R mit E' und ausserdem durch die Ecken der Pyramidengrundflächen, und man hat somit das nämliche Konstruktionsverfahren wie im Fall 1 der Frage und Antwort 27.

Figur 59.



Sehr häufig wird es aber vorkommen, dass der Punkt t gar nicht zugänglich erscheint, d. h. über die Grenze der zur Verfügung stehenden Zeichnungsfläche hinausfällt, wie z. B. in Figur 59. In diesem Falle erhält

man einen Punkt der Schnittlinie der Hilfsebene mit Ebene E' mittels einer Parallelen zu derjenigen Pyramidenkante, durch welche die Ebene gelegt ist, durch die Spitze der anderen Pyramide. So ist z. B. durch die Pyramidenkante $s_{1,2}$ eine Ebene gelegt und durch s' eine Parallele $s't'$ zur Pyramidenkante $s_{1,2}$ gezogen; durch deren Schnittpunkt t' mit E' geht die Schnittlinie S' der Hilfsebene und schneidet die Seiten der Grundfläche der Pyramide s' in zweien Punkten 1 und 2, durch welche die Schnittlinien der Hilfsebene mit der Pyramide s' hindurchgehen und die Punkte I und II auf der Kante $s_{1,2}$ liefern.

In gleicher Weise bestimmen sich die übrigen Punkte der Schnittfigur, z. B. die Punkte III und IV mittels der Parallelen $s'u'$ zu $s_{3,4}$ die Punkte V und VI mittels der Parallelen $s'v'$ zu $s_{5,6}$, die Punkte VII und VIII mittels der Parallelen sw zu $s'_{7,8}$ etc.

Ist der Punkt t' als Schnittpunkt der Parallelen durch s' zu $s_{1,2}$ mit E' ermittelt, so ergibt sich der Punkt u' im Schnitt der Parallelen durch t' zur Grundkante 1,2 3,4 und der Parallelen durch s' zu $s_{3,4}$, ebenso Punkt v' im Schnitt der Parallelen $t'v'$ zur Grundkante 1,2 5,6 und sv' zu $s_{5,6}$.

Die Punkte t', u', v' bilden in E' eine Figur, ähnlich der Grundfläche der Pyramide s , desgleichen bilden die Punkte w etc. eine Figur, ähnlich der Grundfläche der Pyramide s' .

Fall 2. Liegen aber die Grundflächen beider Pyramiden in verschiedenen Grundflächen, so bleibt das Konstruktionsverfahren genau dasselbe wie im Fall 2 der Frage und Antwort 27. Die Gerade R ist dabei die Verbindungslinie der beiden Pyramidenspitzen, und die Hilfsebenen gehen durch die Schnittpunkte t und u von R mit den Grundflächenebenen E' und E'' .

5) Ueber die rechtwinklige Projektion der regulären und halbbregulären Körper (Polyeder).

A) Ueber die regulären Polyeder im allgemeinen.

Frage 29. Was versteht man unter einem regulären Polyeder?

Erkl. 69. Aus nebenstehender Antwort der Frage folgt ausserdem die Eigenschaft, dass bei jedem regulären Polyeder sämtliche Kanten und körperlichen Winkel einander gleich sind.

Antwort. Ein Polyeder heisst regulär, wenn seine sämtlichen Begrenzungsflächen aus kongruenten Vielecken bestehen und an jeder Körperecke gleichviel Flächen zusammenstossen.

Frage 30. Wie viele reguläre Polyeder lassen sich mit regulären konvexen Vielecken bilden?

Antwort. Es gibt nur fünf reguläre Polyeder; ihre Begrenzungsflächen sind gebildet entweder:

- a) aus Dreiecken,
- b) aus Vierecken,
- c) aus Fünfecken.

Mit regulären Sechsecken, Siebenecken u. s. w. ist eine Körperbegrenzung deshalb unmöglich, weil schon bei dreien an einer Ecke zusammenstossenden Sechsecken, Siebenecken etc. die Summe der Seitenwinkel gleich 360° und mehr beträgt, eine körperliche Ecke somit nicht mehr entsteht.

Frage 31. Welche reguläre Polyeder lassen sich mit Dreiecken bilden?

Erkl. 70. Das Wort „Ikosaëder“, stammt aus dem Griechischen (eikosi, zwanzig, und hedra, Fläche), heisst also Zwanzigflächner.

Erkl. 71. Weitere Körper mit gleichseitigen Dreiecken zu bilden, ist unmöglich, da die Summe der Winkel von sechs aneinanderstossenden Dreiecken schon 360° beträgt, eine körperliche Ecke demnach nicht mehr vorhanden ist.

Antwort. Mit regulären Dreiecken sind drei verschiedene Polyeder möglich, nämlich:

1) Es stossen an jeder Ecke drei Dreiecke an einander; der Körper ist begrenzt im ganzen von vier Dreiecken und heisst Tetraëder oder Vierflächner; er besitzt vier Ecken und sechs Kanten.

2) Es stossen an jeder Ecke vier Dreiecke an einander; der Körper heisst Oktaëder oder Achtflächner, ist begrenzt von acht Dreiecken und besitzt sechs Ecken zwölf Kanten.

3) Es stossen an jeder Ecke fünf Dreiecke zusammen, der Körper heisst Ikosaëder, siehe Erkl. 70, oder Zwanzigflächner, besitzt zwanzig Dreiecke als Begrenzungsflächen und ausserdem zwölf Ecken und dreissig Kanten.

Frage 32. Welche reguläre Polyeder lassen sich mit den übrigen in der Antwort der Frage 30 genannten Vielecken bilden?

Erkl. 72. Das Wort „Dodekaëder“ stammt aus dem Griechischen (dodeka, zwölf, und hedra, Fläche), heisst also Zwölfflächner.

Erkl. 73. Die in den Antworten der Fragen 31 bis 32 genannten Körper führen die gemeinsame Bezeichnung: „Platonische Körper“, weil ihr Vorhandensein schon dem griechischen Philosophen Plato (gest. 348 v. Chr.) bekannt war.

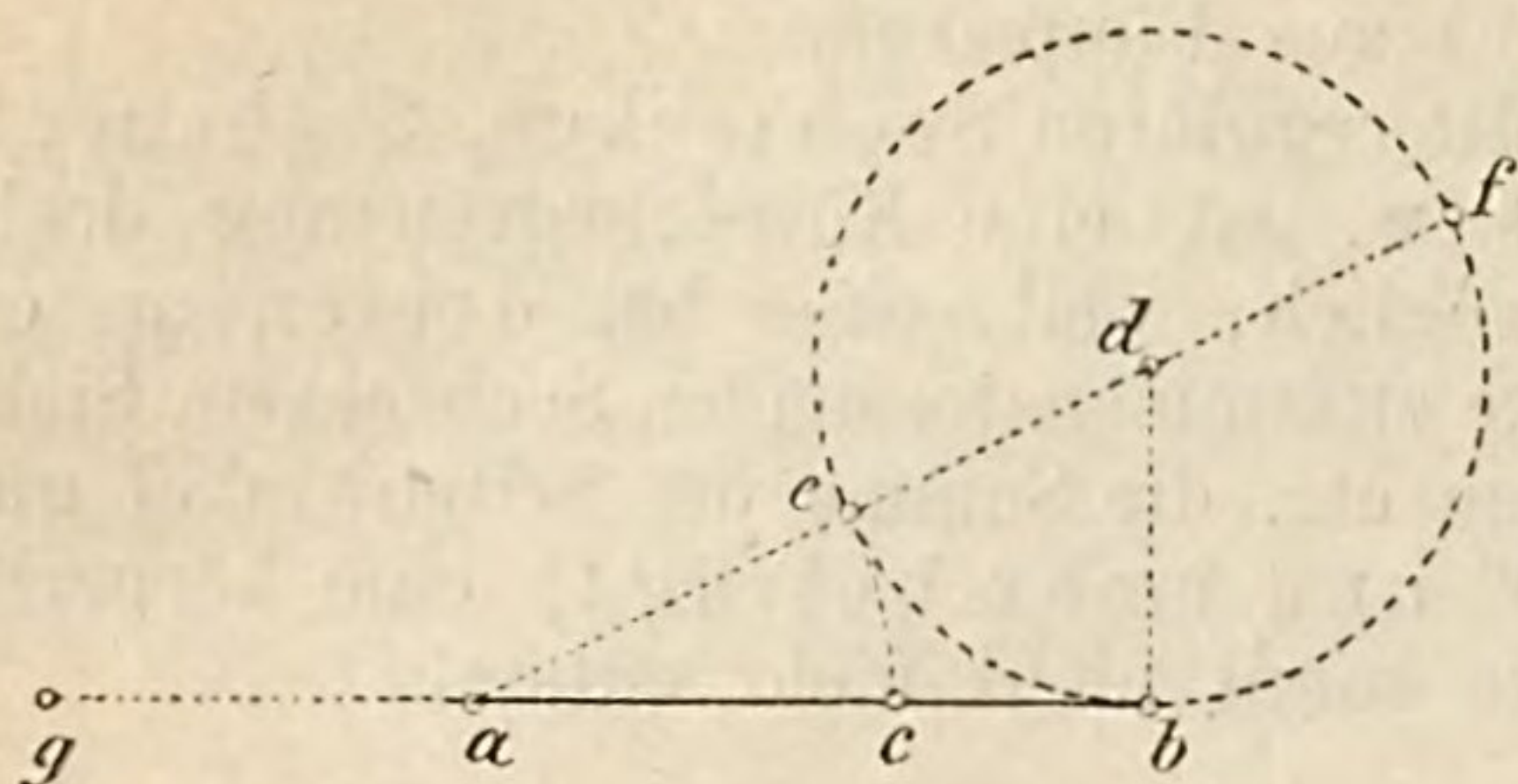
Antwort. Sowohl mit regulären Vier- wie Fünfecken lässt sich je nur ein Polyeder begrenzen, insofern an jeder Ecke drei dieser Flächen zusammenstossen; im ersten Fall erhält man:

Das Hexaëder oder den Würfel, auch Sechsfächner genannt; der Körper besitzt sechs Flächen, acht Ecken und zwölf Kanten; im zweiten Fall entsteht das Dodekaëder, siehe Erkl. 72, oder der Zwölfflächner, welcher Körper zwölf reguläre Fünfecke als Begrenzungsflächen und ausserdem zwanzig Ecken und dreissig Kanten besitzt.

B) Einige Bemerkungen über den goldenen Schnitt.

Frage 33. Was versteht man unter dem goldenen Schnitt?

Figur 60.



Erkl. 74. Bezeichnet l die Länge der Strecke $\overline{ab}$, x jene des grösseren Abschnittes $\overline{ac}$, so folgt aus der Beziehung:

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l-x}$$

die weitere:

$$x^2 = l^2 - l + x$$

und hieraus:

$$x = \frac{l}{2} \cdot (-1 + \sqrt{5}) \quad \dots \quad 25)$$

Antwort. Ist eine Strecke $\overline{ab}$, siehe Figur 60, in einem Punkte c so in zwei Abschnitte geteilt, dass die ganze Strecke zum grösseren Abschnitt im gleichen Verhältnis steht, wie der grössere Abschnitt zur Differenz zwischen ganzer Strecke und grösserem Abschnitt, dass also die Verhältnissgleichheit:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab} - \overline{ac}}$$

stattfindet, so nennt man diese Teilung der Strecke $\overline{ab}$ den goldenen Schnitt und sagt: die Strecke $\overline{ab}$ ist im Punkte c im goldenen Schnitt geteilt.

Frage 34. Wie wird die Teilung einer Strecke im goldenen Schnitt ausgeführt?

Erkl. 75. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „Zieht man von einem Punkte p ausserhalb eines Kreises an diesen eine Tangente und Sekante, so ist das Quadrat über der Tangente gleich dem Rechtecke, gebildet aus den Entfernungen der Durchschnittspunkte der Sekante vom Punkte p .“

Erkl. 76. Trägt man, siehe Figur 60, den grösseren Abschnitt $\overline{ac}$ einer im goldenen Schnitt geteilten Strecke $\overline{ab}$ nach $\overline{ag}$ ab, so ist nunmehr auch die Strecke $\overline{bg}$ im Punkte c im goldenen Schnitt geteilt. Durch fortgesetztes Verlängern einer im goldenen Schnitt geteilten Strecke um deren grösseren Abschnitt erhält man stets eine neue Teilung im goldenen Schnitt.

Antwort. Ist, siehe Figur 60, $\overline{ab}$ die gegebene Strecke, so mache man $\overline{bd}$ senkrecht zu $\overline{ab}$ und gleich $\frac{1}{2}\overline{ab}$ ziehe $\overline{ad}$ und trage von d aus auf $\overline{ad}$ die Strecke $\overline{de} = \overline{db} = \frac{1}{2}\overline{ab}$ ab, so ist die Strecke $\overline{ae}$ gleich dem grösseren Abschnitt der im goldenen Schnitt geteilten Strecke $\overline{ab}$, d. h. es ist $\overline{ac} = \overline{ae}$ abzutragen, um in c den gesuchten Teilungspunkt zu erhalten. Zunächst folgt, wenn $\overline{ad}$ nach $\overline{f}$ verlängert und $\overline{df} = \overline{db}$ gemacht wird, die Beziehung:

$$\overline{ab}^2 = \overline{ae} \cdot \overline{af} \quad \text{siehe Erkl. 75,}$$

hieraus folgt aber die Verhältnissgleichheit:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{af}} = \frac{\overline{ae}}{\overline{ab}}$$

oder auch:

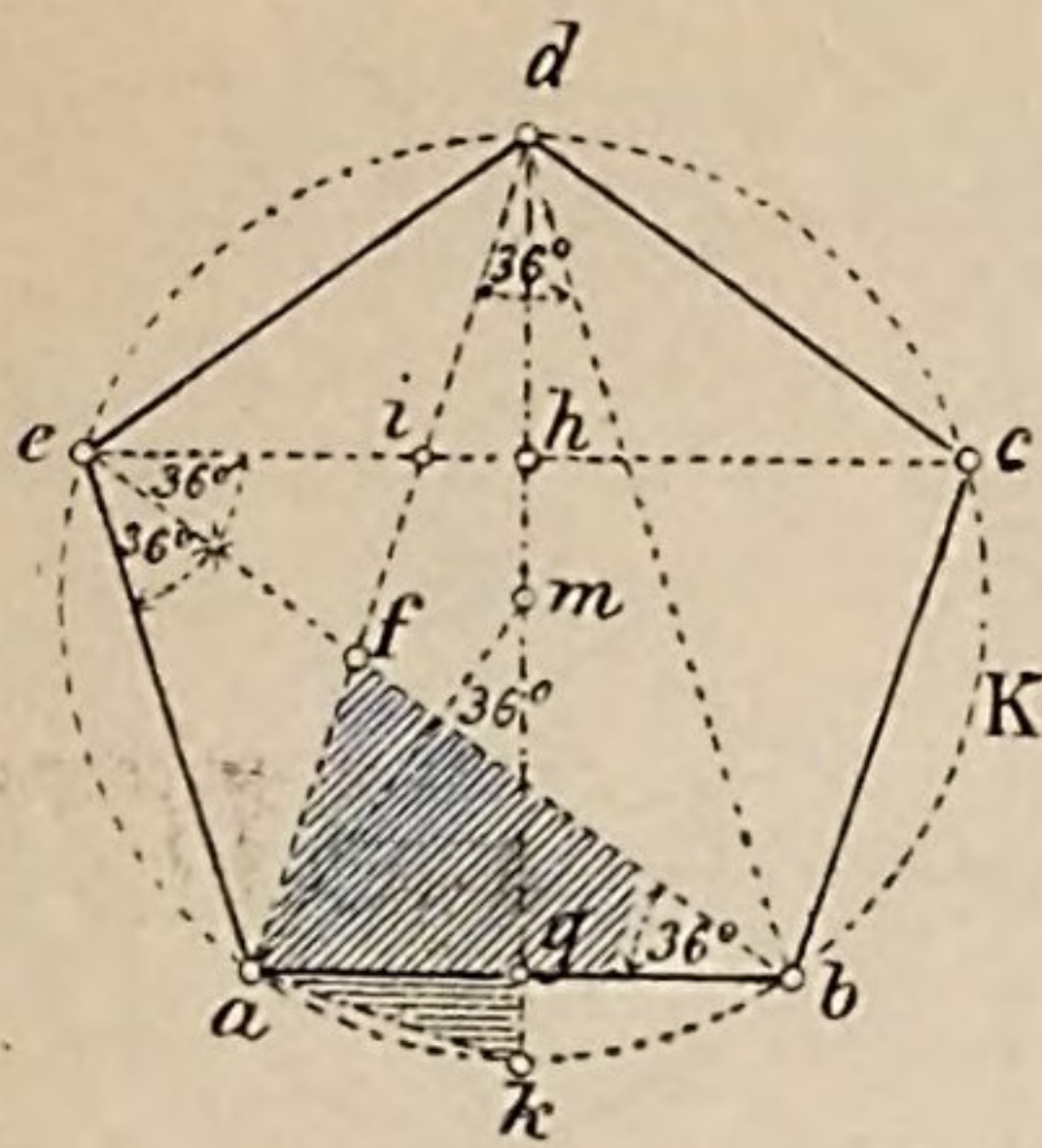
$$\frac{\overline{ab}}{\overline{af} - \overline{ab}} = \frac{\overline{ae}}{\overline{ab} - \overline{ae}}$$

oder in Rücksicht der Gleichheit $\overline{ac} = \overline{ae}$ auch:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab} - \overline{ac}}$$

Frage 35. Bei welchem regulären Vieleck tritt die Teilung im goldenen Schnitt häufig auf?

Figur 61.



Erkl. 77. Die Antwort der Frage 35 enthält folgende Sätze:

„Zwei Diagonalen eines regulären Fünfecks treffen sich stets in einem Punkte, der beide Diagonalen im goldenen Schnitt teilt.“

„Die zu einer Seite gehörige Höhe wird von der zur Seite parallelen Diagonale stets im goldenen Schnitt geteilt.“

„Trägt man auf einer Fünfecksdiagonale von einem Endpunkte aus die Fünfecksseite ab, so wird hiedurch erstere im goldenen Schnitt geteilt.“

Erkl. 78. Zufolge der in Erkl. 77 genannten Sätze über das reguläre Fünfeck kann man nunmehr leicht die Aufgabe lösen: Es ist ein reguläres Fünfeck bei bekannter Seitenlänge ohne Zuhilfenahme des umschriebenen Kreises zu konstruieren. Man braucht ja nur die Fünfecksseite $\overline{ab}$, gleich l im Punkt p im goldenen Schnitt zu teilen, die Seite ab über b hinaus, um die Strecke $\overline{aq} = \overline{ap}$ zu verlängern, so ist die Länge $\overline{bq}$ gleich der Fünfecksdiagonale. Die Kreise mit den Mittelpunkten a und b und den Halbmessern gleich $\overline{ab}$ und $\overline{bq}$ enthalten die noch fehlenden Ecken c , d und e des regulären Fünfecks über ab .

Erkl. 79. Verlängert man, siehe Figur 61, die Linie dg bis zum Punkte k der Kreisperipherie K , so wird $\overline{ak}$ gleich der Seite des dem Kreise K eingeschriebenen regulären Zehneckes. Da nun aber der Winkel $\hat{amg} = 36^\circ$ beträgt, so besteht die Beziehung:

$$\frac{\overline{am}}{\overline{ak}} = \frac{\overline{ak}}{\overline{am} - \overline{ak}}$$

d. h. man erhält die Seite des regulären Zehneckes gleich dem grösseren Abschnitt des im goldenen Schnitt geteilten Halbmessers des umschriebenen Kreises K .

Antwort. Die Teilung im goldenen Schnitt tritt häufig beim regulären Fünfeck auf.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass je zwei Diagonalen wie $\overline{ad}$ und $\overline{be}$, siehe Figur 61, sich stets in einem Punkte f so treffen, dass in f beide Diagonalen im goldenen Schnitt geteilt sind.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke abd und afb (sie haben die drei Winkel gleich) folgt nämlich unmittelbar die Beziehung:

$$\frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{af}}$$

Nun ist aber auch, wie aus der Figur 61 ersichtlich, $\overline{ab} = \overline{bf} = \overline{df}$, daher hat man auch:

$$\frac{\overline{ad}}{\overline{fd}} = \frac{\overline{fd}}{\overline{fa}}$$

oder:

$$\frac{\overline{be}}{\overline{bf}} = \frac{\overline{bf}}{\overline{ef}}$$

Zieht man in Figur 61 die zur Seite ab gehörige Höhe $\overline{dg}$, so trifft diese die zu ab parallele Diagonale $\overline{ec}$ in einem Punkte h , der die Höhe $\overline{dg}$ im goldenen Schnitt teilt, denn es ist ja:

$$\frac{\overline{dg}}{\overline{dh}} = \frac{\overline{da}}{\overline{di}}.$$

Aus der Figur 61 folgt ferner, dass, wenn man in einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Winkel an der Spitze 36° beträgt, die Länge der Grundlinie auf einen Schenkel abträgt, dieser durch den zweiten Endpunkt der Grundlinie im goldenen Schnitt geteilt wird.

Erkl. 80. Bezeichnet r den Kreishalbmesser, z die Länge der Zehnecksseite, f die der Fünfecksseite, so finden zwischen den genannten drei Grössen folgende Beziehungen statt:

Zunächst ist:

$$\frac{r}{z} = \frac{z}{r - z}$$

oder:

$$z^2 = r^2 - r \cdot z \quad . \quad . \quad . \quad 26)$$

oder:

$$r \cdot z = r^2 - z^2 \quad . \quad . \quad . \quad 27)$$

Ferner hat man zufolge eines planimetrischen Lehrsatzes:

$$z^2 = 2r \cdot \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{f^2}{4}} \right) \quad . \quad . \quad 28)$$

Durch Gleichsetzen der Werte in den Gleichungen 26 und 28 ergibt sich die Gleichung:

$$r^2 - r \cdot z = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - \frac{f^2}{4}}$$

oder:

$$2 \cdot \sqrt{r^2 - \frac{f^2}{4}} = r - z$$

Wird auf beiden Seiten quadriert, so folgt:

$$4r^2 - f^2 = r^2 + 2r \cdot z + z^2$$

oder in Rücksicht auf Gleichung 26:

$$4r^2 - f^2 = r^2 + 2r^2 - 2z^2 + z^2$$

oder:

$$f^2 = z^2 + r^2 \quad . \quad . \quad . \quad 29)$$

$$f = \sqrt{z^2 + r^2} \quad . \quad . \quad . \quad 30)$$

„Mit den drei Längen f , z und r lässt sich somit ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, das die Fünfecksseite zur Hypotenuse, die Zehnecksseite und den Kreishalbmesser aber zu Katheten hat.“

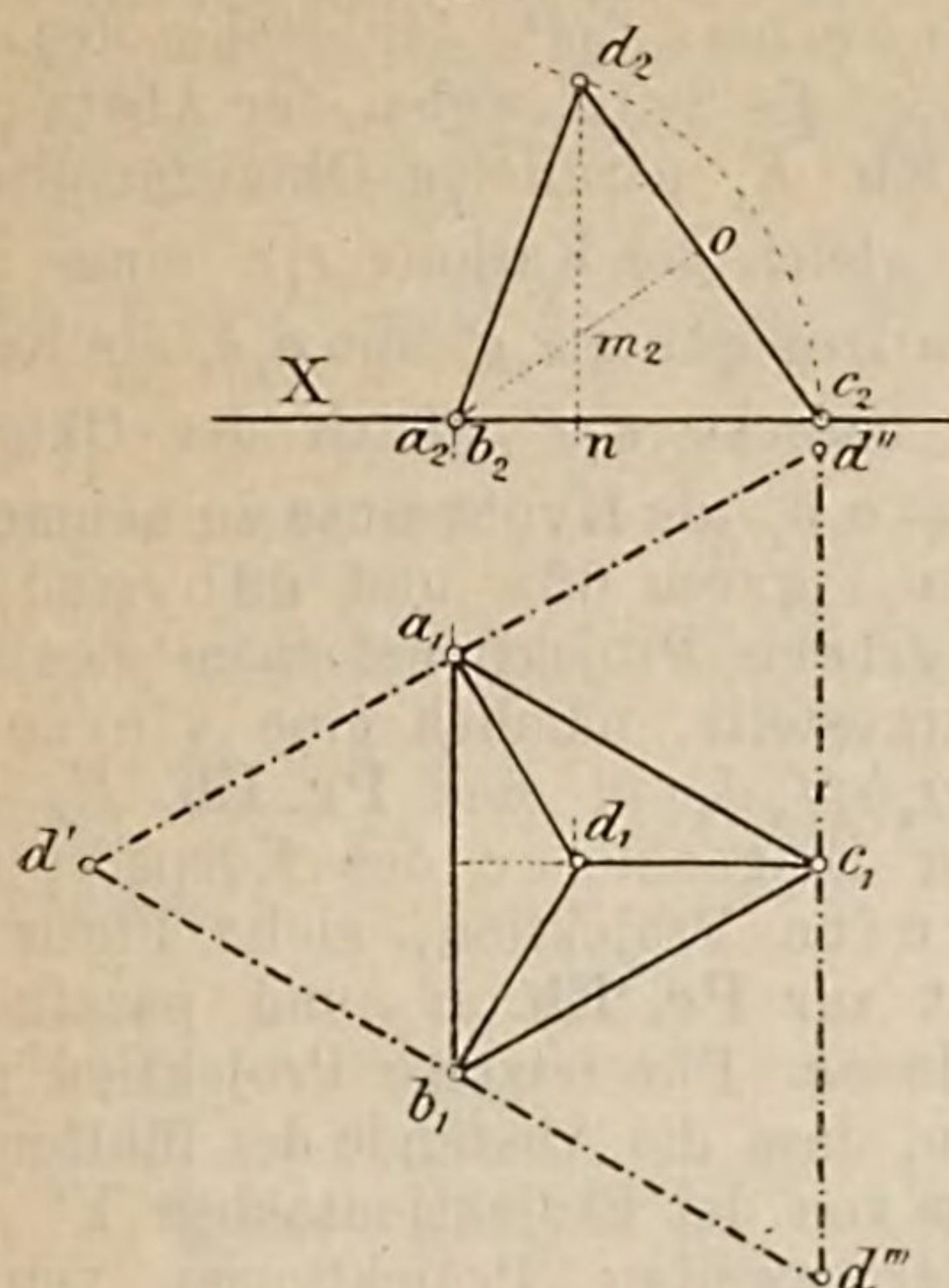
C) Ueber die Konstruktion der Projektionen und Netze der fünf regulären (platonischen) Körper bei gegebener Kantenlänge.

Anmerkung 21. Bezüglich der Annahme der **Pr. Ebn.** siehe Anmerkung 5.

Frage 36. Wie gestalten sich die rechtwinkligen Projektionsformen eines Tetraëders?

Antwort. Der Umriss der ersten Projektion, siehe Figur 62, ist ein reguläres Dreieck, in welchem der Höhenschnittpunkt d_1 die erste Projektion der vierten Tetraëderecke

Figur 62.



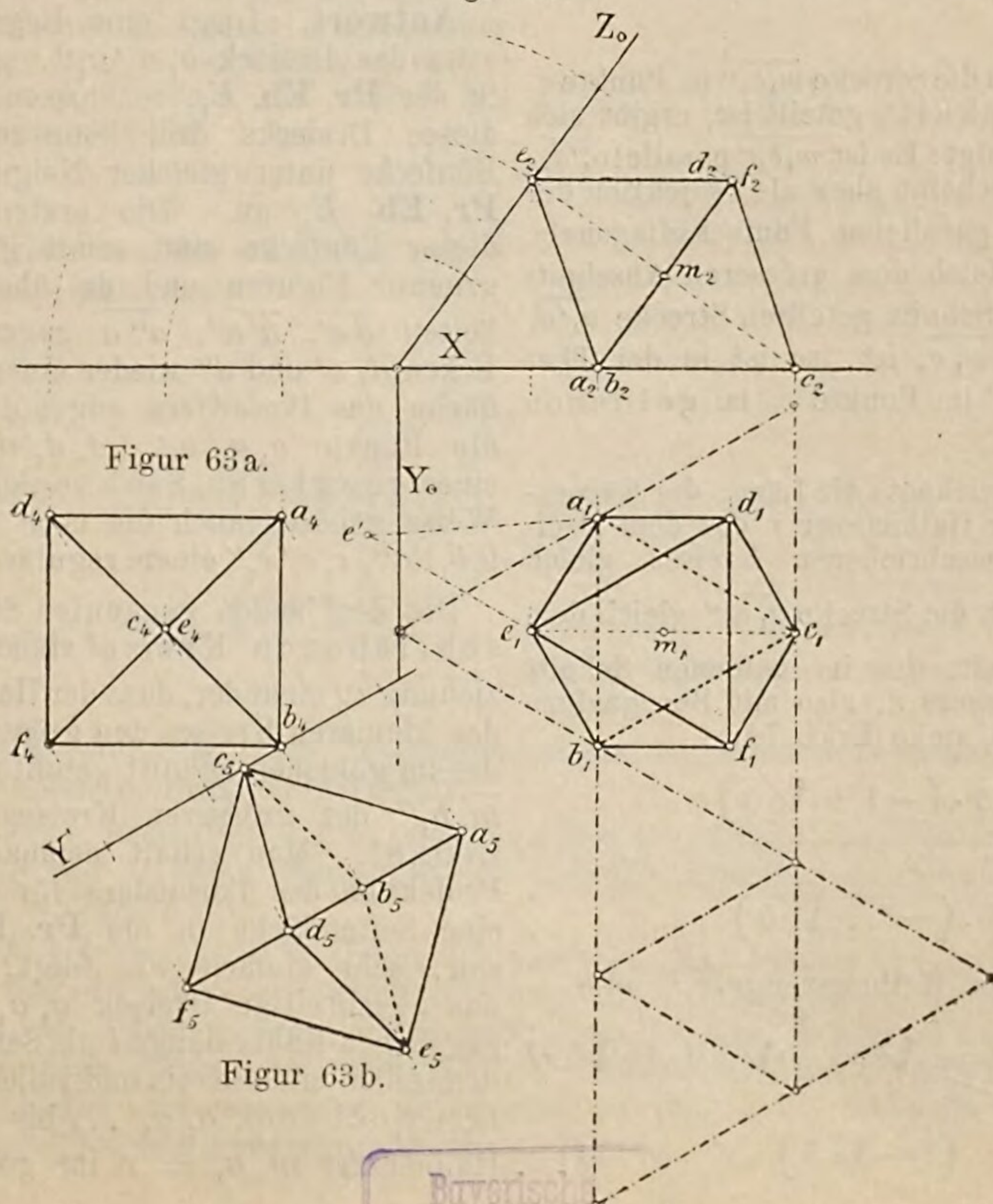
darstellt. Die zweite Projektion erscheint als ein gleichschenkliges Dreieck $a_2 c_2 d_2$ mit der Kantenlänge l als Grundlinie und der Höhe des Dreiecks $a_1 b_1 c_1$ als Schenkellänge.

Das Tetraëdernetz, aus vier gleichseitigen Dreiecken bestehend, ist begrenzt durch das gleichseitige Dreieck $d' d'' d'''$.

Frage 37. Wie gestalten sich die rechtwinkligen Projektionsformen eines Oktaëders?

Antwort. Behufs Darstellung der ersten Projektion zeichne man die gleichseitigen Dreiecke $a_1 b_1 c_1$ und $d_1 e_1 f_1$, siehe Figur 63, so, dass die sechs Punkte a_1 bis f_1 die Ecken eines regulären Sechsecks bilden.

Figur 63.



Figur 63 a.

Figur 63 b.

Die zweite Projektion ist begrenzt durch einen Rhombus mit der Höhe des Dreiecks $a_1 b_1 c_1$ als Seite, wobei der Abstand der zur **Pr. Eb.** E_1 parallelen Oktaederseite von letzterer gleich der Kathete $e_1 e'$ eines rechtwinkligen Dreiecks $a_1 e_1 e'$ mit $a_1 e_1$ als Kathete und der Strecke $a_1 e'$ gleich der Oktaederkante $l = a_1 b_1$ als Hypotenuse zu nehmen ist.

In den Figuren 63a und 63b sind noch zwei weitere Projektionsformen des Oktaeders dargestellt, nämlich eine vierte Projektion $a_4 b_4 f_4 d_4$ in eine **Pr. Eb.** E_4 senkrecht zur Diagonale ec des Körpers, sowie eine fünfte Projektion, siehe Figur 63b, senkrecht zur **Pr. Eb.** E_4 und parallel zur Diagonale ec . Für letztere Projektion ist zu bemerken, dass die Abstände der fünften Projektionen von der Projektionsachse Y' gleich jenen der zweiten Projektionen von der Achse Z_0 zu nehmen sind.

Das Netz des Körpers, aus acht gleichseitigen Dreiecken bestehend, ist durch die strichpunktirten Dreiecke angedeutet.

Frage 38. Wie gestalten sich die rechtwinkligen Projektionsformen eines Ikosaeders?

Erkl. 81. Dass die Strecke $\overline{m_1 b_1''}$ im Punkte a_1 im goldenen Schnitt geteilt ist, ergibt sich unmittelbar wie folgt: Es ist $\overline{m_1 b_1''}$ parallel $\overline{a_1' d_1}$; letztere Linie erscheint aber als Projektion der zur Seite $\overline{a_1 b_1''}$ parallelen Fünfecksdiagonale, daher ist $\overline{a_1 b_1''}$ gleich dem grösseren Abschnitt der im goldenen Schnitt geteilten Strecke $\overline{a_1' d_1}$ und da $\overline{a_1' d_1} = \overline{m_1 a_1}$ ist, so ist in der That die Strecke $\overline{m_1 b_1''}$ im Punkte a_1 im goldenen Schnitt geteilt.

Erkl. 82. Bezeichnet l die Länge der Körperkante, so ist der Halbmesser r des dem Dreieck $a_1 a_1' a_1''$ umschriebenen Kreises gleich $\frac{l}{3} \cdot \sqrt{3}$. Nun ist die Strecke $\overline{a_1 b_1''}$ gleich dem grösseren Abschnitt des im goldenen Schnitt geteilten Halbmessers r , also mit Bezugnahme auf Gleichung 25, siehe Erkl. 74:

$$\begin{aligned} \overline{a_1 b_1''} &= \frac{\frac{l}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (-1 + \sqrt{5})}{2} \\ &= \frac{l}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot (-1 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Folglich ist der Halbmesser $\overline{m_1 b_1''}$ oder

$$\begin{aligned} R &= r + \overline{a_1 b_1''} = \frac{l}{3} \cdot \sqrt{3} + \frac{l}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot (-1 + \sqrt{5}) \\ R &= \frac{l}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5}) \quad . . . \quad 31) \end{aligned}$$

Antwort. Liegt eine Begrenzungsfläche, etwa das Dreieck $a_1 a_1' a_1''$, siehe Figur 64, in der **Pr. Eb.** E_1 , so stossen an die Seiten dieses Dreiecks drei kongruente, reguläre Fünfecke unter gleicher Neigung gegen die **Pr. Eb.** E_1 an. Die ersten Projektionen dieser Fünfecke sind somit gleichfalls kongruente Figuren und da überdies die den Seiten $\overline{a a'}$, $\overline{a' a''}$, $\overline{a'' a}$ gegenüberliegenden Ecken d , d' und d'' wieder einer Begrenzungsfläche des Ikosaeders angehören, so bilden die Punkte $a_1 a_1' a_1''$, $d_1 d_1' d_1''$ die Ecken eines regulären Sechsecks. In gleicher Weise gehören auch die noch übrigen Ecken $b_1 b_1' b_1''$, $c_1 c_1' c_1''$ einem regulären Sechseck an.

Die den beiden genannten Sechsecken umschriebenen Kreise stehen in der Beziehung zu einander, dass der Halbmesser $\overline{m_1 a_1}$ des kleineren Kreises den grösseren Abschnitt des im goldenen Schnitt geteilten Halbmessers $\overline{m_1 b_1''}$ des grösseren Kreises bildet, siehe Erkl. 81. Man erhält demnach die erste Projektion des Ikosaeders für den Fall dass eine Seitenfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegen soll, sehr einfach wie folgt: Man zeichne das gleichseitige Dreieck $a_1 a_1' a_1''$ mit der gegebenen Kantenlänge l als Seite, umschreibe demselben einen Kreis und vollende das reguläre Sechseck $a_1 a_1' \dots$ bis d_1'' . Teile den Halbmesser $\overline{m_1 a_1} = r$ im goldenen Schnitt

Die Strecke $\overline{a_1 b_1''}$ ist aber auch als Kathete in dem rechtwinkligen Dreieck $a_1 b_1'' b$, in welchem $\overline{a_1 b} = l$ ist, enthalten. Man hat somit auch die Beziehung:

$$\begin{aligned} \overline{b_1'' b}^2 &= l^2 - \overline{a_1 b_1''}^2 = l^2 - \left(\frac{l}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5}) \right)^2 \\ &= l^2 \cdot \frac{(3 + \sqrt{5})}{6}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $3 + \sqrt{5}$ ist aber gleichbedeutend mit $\frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2}$, siehe Erkl. 83, folglich hat man:

$$\begin{aligned} \overline{b_1'' b}^2 &= \frac{l^2 \cdot (1 + \sqrt{5})}{6 \cdot 2}, \text{ daher:} \\ \overline{b_1'' b} &= \sqrt{\frac{l^2 \cdot (1 + \sqrt{5})^2}{12}} = \frac{l \cdot \sqrt{1 + 5}}{2 \cdot \sqrt{3}} \\ &= \frac{l}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + 5} \dots \dots \dots 32) \end{aligned}$$

welcher Ausdruck mit dem unter 31) bezeichneten für R übereinstimmt. Da nun die Strecke $\overline{a_2 d_2}$, siehe Figur 64, im Punkte b_2' im goldenen Schnitt geteilt erscheint, so verhalten sich auch die Abstände der Punkte d und b' von der **Pr. Eb.** E_1 , wie die Abschnitte einer im goldenen Schnitt geteilten Strecke, woraus weiter folgt, dass die Abstände der Punkte d und b' von der **Pr. Eb.** E_1 gleich $r + R$ und R beziehungsweise sein müssen.

Erkl. 83. Erhebt man den Ausdruck $1 + \sqrt{5}$ zum Quadrat, so erhält man:

$$\begin{aligned} &1 + \sqrt{5} \\ &1 + \sqrt{5} \\ \hline &1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$3 + \sqrt{5} = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2}.$$

Anmerkung 22. Jede der vier Projektionsformen des Ikosaëders lässt sich unabhängig von den anderen direkt konstruieren.

Die erste Projektion ergibt sich unmittelbar mittels der beiden mit den Halbmessern r und R beschriebenen Kreise und den denselben eingeschriebenen regulären Sechsecken.

Die zweite Projektion bestimmt sich wie folgt: Man zeichne das Rechteck $b_2 a_2'' c_2'' d_2$ mit den Seiten l und der Fünfecksdiagonale. Zieht man ferner $c_2 b_2''$ durch den Mittelpunkt m_2 des eben genannten Rechtecks parallel zur grösseren Rechtecksseite und der Länge nach gleich l , so treffen sich die Verbindungslinien der Eckpunkte c_2 und b_2'' mit den Ecken des genannten Rechtecks in den noch fehlenden Ecken d_2' (d_2'') bzw. a_2 (a_2') der Polyederprojektion.

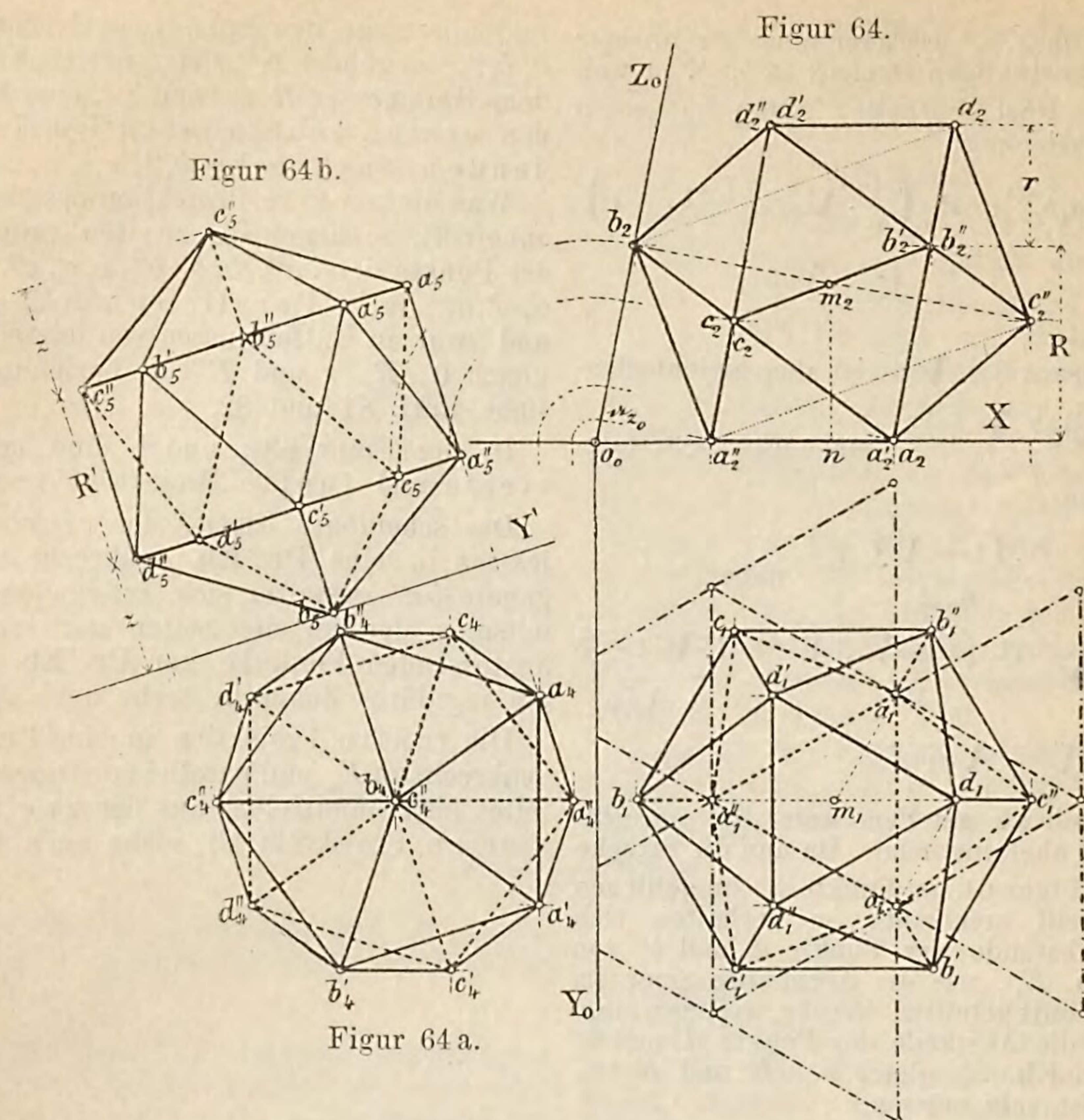
und übertrage den grösseren Abschnitt nach $a_1 b_1''$, so gehört b_1'' dem zweiten Kreise mit dem Halbmesser R an und ist eine Ecke des den ersten scheinbaren Umriss bildenden Sechsecks b_1'' , c_1 bis c_1'' .

Was die zweite Projektion des Ikosaëders anbelangt, so liegen die zweiten Projektionen der Punkte $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, endlich d, d', d'' je in Parallelen zur X -Achse, und zwar in Entfernungen von letzterer Linie gleich $0, R, r$ und $R + r$ beziehungsweise, siehe Erkl. 81 und 82.

In der Figur 63a und b sind noch eine vierte und fünfte Projektion verzeichnet.

Der scheinbare Umriss der vierten Projektion in eine **Pr. Eb.** senkrecht zur Diagonale $b c''$ gestaltet sich, infolge des Parallelismus der an die Seiten $a a'$ und $d' d''$ anstossenden Fünfecke zur **Pr. Eb.** E_4 , als ein reguläres Zehneck, siehe auch Anm. 22.

Die fünfte Projektion in eine **Pr. Eb.** E_5 senkrecht zu E_4 und parallel zur Diagonale $b c''$ leitet sich unmittelbar aus der zweiten und vierten Projektion ab, siehe auch Anm. 22.



Die vierte Projektion bestimmt sich unmittelbar mittels des Zehnecks. Man zeichnet sich zunächst ein reguläres Fünfeck, siehe Figur 64 a, mit der Seite gleich l , siehe Erkl. 78, und konstruiert hiezu auf dem dem Fünfeck umschriebenen Kreise die noch fehlenden fünf Ecken des regulären Zehnecks.

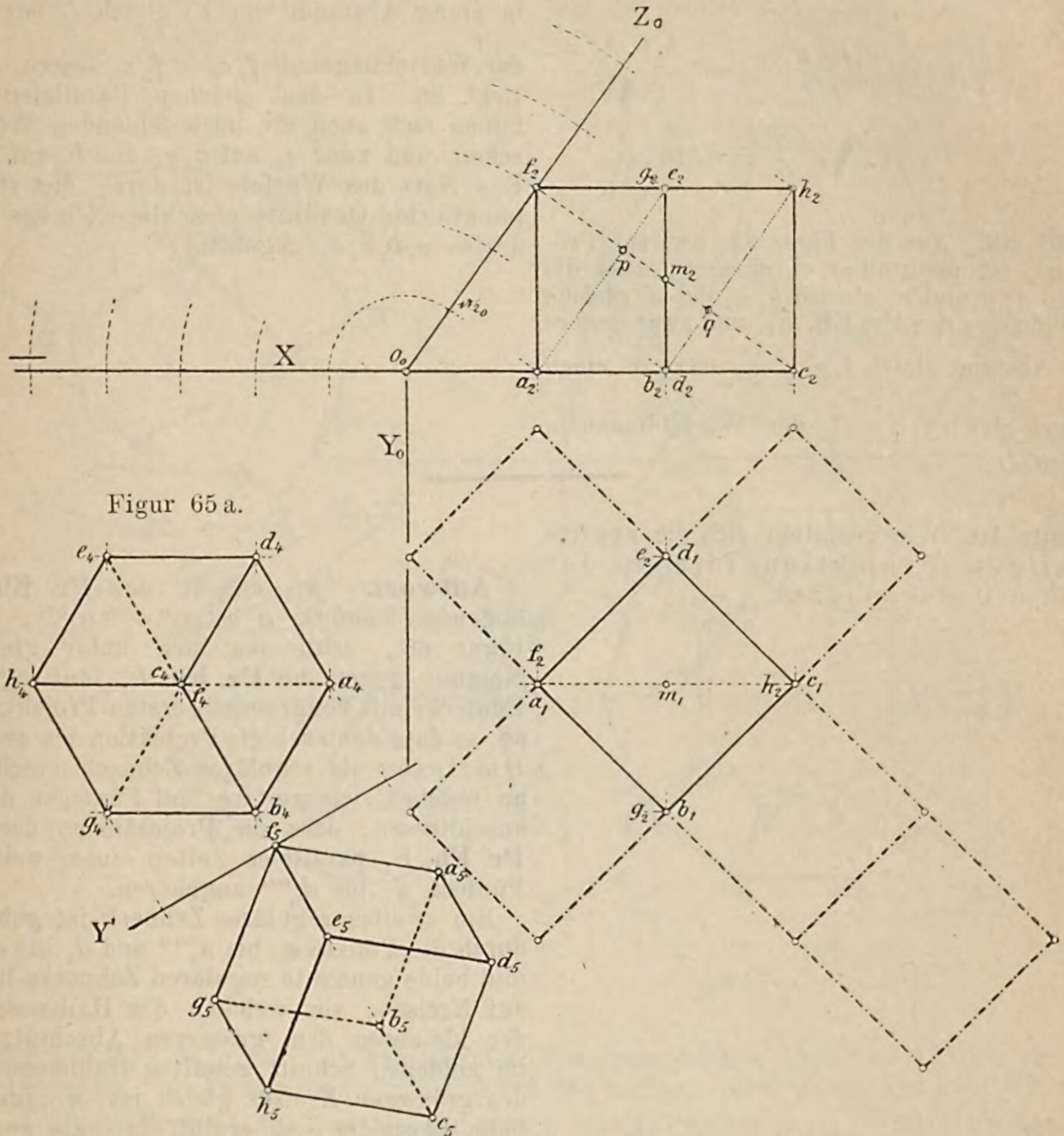
Zur direkten Verzeichnung der fünften Projektion verschafft man sich wieder aus der Länge l die Länge z der Zehneckseite, sowie den Halbmesser R' des dem Fünfeck bzw. Zehneck umschriebenen Kreises. Bedenkt man ferner, dass die Entfernung der beiden zur **Pr. Eb. E_5** senkrechten Fünfecksebenen einen Abstand gleich R' , die Eckpunkte c'' und b'' von letzteren aber einen solchen gleich z besitzen, siehe Erkl. 84, und dass ferner die Kanten $b_5'a_5'$ und $d_5'c_5'$, siehe Figur 64 b, sich in wahrer Grösse, also gleich l projizieren, so kann nunmehr die bezeichnete fünfte Projektion direkt, ohne Zuhilfenahme der übrigen Projektionsformen konstruiert werden.

Erkl. 84. Aus der Figur 64 ist unmittelbar ersichtlich, dass in dem rechtwinkligen Dreieck $a_2''b_2a_{z_0}$ die Hypotenuse gleich der Fünfecksseite, die Kathete $b_2a_{z_0}$ gleich R' ist, somit nach Erkl. 80 die zweite Kathete $a_2''a_{z_0}$ gleich der Zehneckseite sein muss. Hieraus folgt aber unmittelbar zufolge der Teilung nach dem goldenen Schnitt die Gleichheit der Entfernung der beiden zur **Pr. Eb. E_4** parallelen Fünfecksebenen mit dem Halbmesser R' .

Frage 39. Wie gestalten sich die rechtwinkligen Projektionsformen des Hexaëders (Würfels)?

Antwort. Damit nicht die erste und zweite Projektion kongruent ausfallen, wurde im vorliegenden Fall die **Pr. Eb. E_2** nicht senkrecht zu einer Körperkante, sondern parallel zur Diagonale der in der **Pr. Eb. E_1** liegenden Würfel­fläche gewählt.

Figur 65.



Figur 65 b.

Als erste Projektion entsteht nun ein Quadrat $a_1 b_1 c_1 d_1$, siehe Figur 65, als zweite Projektion ein Rechteck $a_2 c_2 h_2 f_2$ mit der Würfelkante und der Quadratdiagonale $= a_1 c_1$ als Seiten.

Eine vierte Projektion, siehe Figur 65 a, in eine Ebene senkrecht zur Würfel­diagonale cf ist begrenzt durch ein reguläres Sechseck, dessen Mittelpunkt mit den Projektionen der

Erkl. 85. Bezeichnet l die Länge der Würfelkante, so erhält man die Länge $\overline{a_1 f_1} = \overline{a_2 f_2} = \overline{a_3 p}$ ihrer vierten Projektion direkt wie folgt:

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $a_2 f_2 c_2$ und $a_2 p c_2$ folgt unmittelbar die Verhältnissgleichheit:

$$\frac{\overline{a_2 f_2}}{\overline{f_2 c_2}} = \frac{\overline{a_2 p}}{\overline{a_2 c_2}}$$

oder:

$$\begin{aligned} \overline{a_2 p} &= \frac{\overline{a_2 f_2} \cdot \overline{a_2 c_2}}{\overline{f_2 c_2}} = \frac{l \cdot l \cdot \sqrt{2}}{l \cdot \sqrt{3}} \\ &= l \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816 \cdot l \end{aligned}$$

Erkl. 86. Aus der Figur 65, zweite Projektion, ist unmittelbar zu ersehen, dass die Punkte a , g und e , ebenso h , b und d gleiche Abstände von der **Pr. Eb.** E_4 , und zwar erstere einen Abstand gleich $\overline{f_2 p} = \frac{1}{3}$, letztere einen

Abstand gleich $\overline{f_2 q} = \frac{2}{3}$ der Würfeldiagonale $\overline{fc}$ besitzen.

noch fehlenden Würfecken zusammenfällt und dessen Seite gleich $l \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816 \cdot l$ ist, siehe Erkl. 85.

Eine fünfte Projektion, siehe Figur 65 b, in eine Ebene E_5 senkrecht zu E_4 und parallel zu einer Würfeldiagonale ist begrenzt durch ein Sechseck $f_5 g_5 h_5 c_5 d_5 a_5$, in welchem die Ecken a_5 und g_5 , ebenso d_5 und h_5 je in einem Abstände von Y' gleich $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ der Würfeldiagonale $\overline{f_5 c_5} = \overline{f_2 c_2}$ liegen, siehe Erkl. 86. In den gleichen Parallelen befinden sich auch die noch fehlenden Würfecken, und zwar e_5 auf $a_5 g_5$ und b_5 auf $h_5 d_5$. Das Netz des Würfels ist durch die strichpunktirten Quadrate einschliesslich des Quadrates $a_1 b_1 c_1 d_1$ gegeben.

Frage 40. Wie gestalten sich die rechtwinkligen Projektionsformen des regulären Dodekaëders?

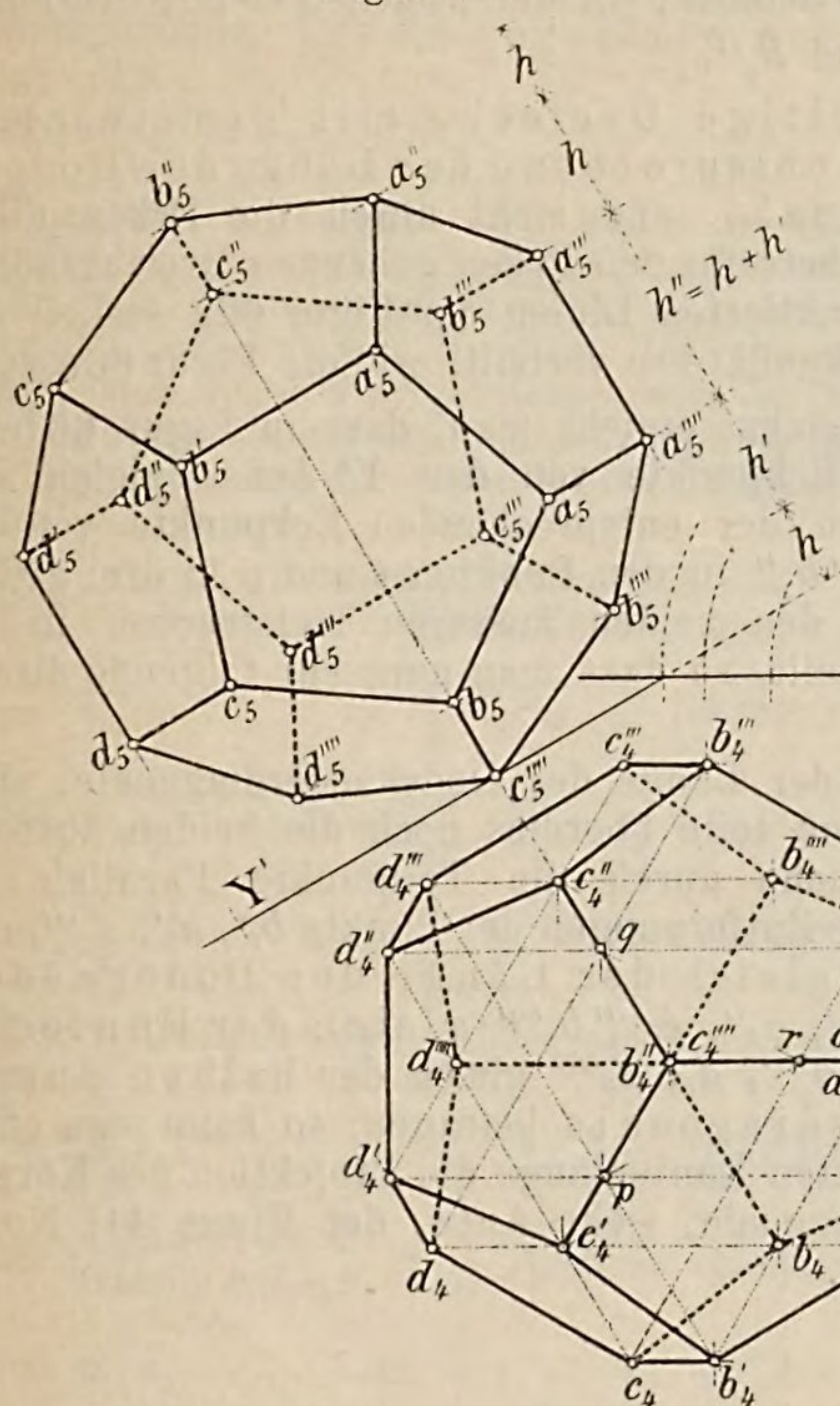
Antwort. An das in der **Pr. Eb.** E_1 liegende Fünfeck $a_1 a_1' a_1'' a_1''' a_1''''$, siehe Figur 66, schliessen sich unter gleicher Neigung gegen die **Pr. Eb.** E_1 fünf reguläre Fünfecke mit kongruenten ersten Projektionen an, so dass demnach die Projektion des ersten Umrisses als reguläres Zehneck erscheint, an welches sich weitere fünf Fünfecke derart anschliessen, dass die Projektionen der zur **Pr. Eb.** E_1 parallelen Seiten einem weiteren Fünfeck d_1 bis d_1'''' angehören.

Ein zweites reguläres Zehneck ist gebildet durch die Punkte a_1 bis a_1'''' und d_1 bis d_1'''' , und beide genannte regulären Zehnecke liegen auf Kreisen, von welchen der Halbmesser r des kleineren dem grösseren Abschnitt des im goldenen Schnitt getheilten Halbmessers R des grösseren Kreises gleich ist, woraus wie beim Ikosaëder sich ergibt, dass die zweiten Projektionen der Punkte $a \dots, b \dots, c \dots$ und $d \dots$ in Parallelen zur X -Achse in den beziehungsweisen Entfernungen o , r , R und $r + R$ sich befinden müssen.

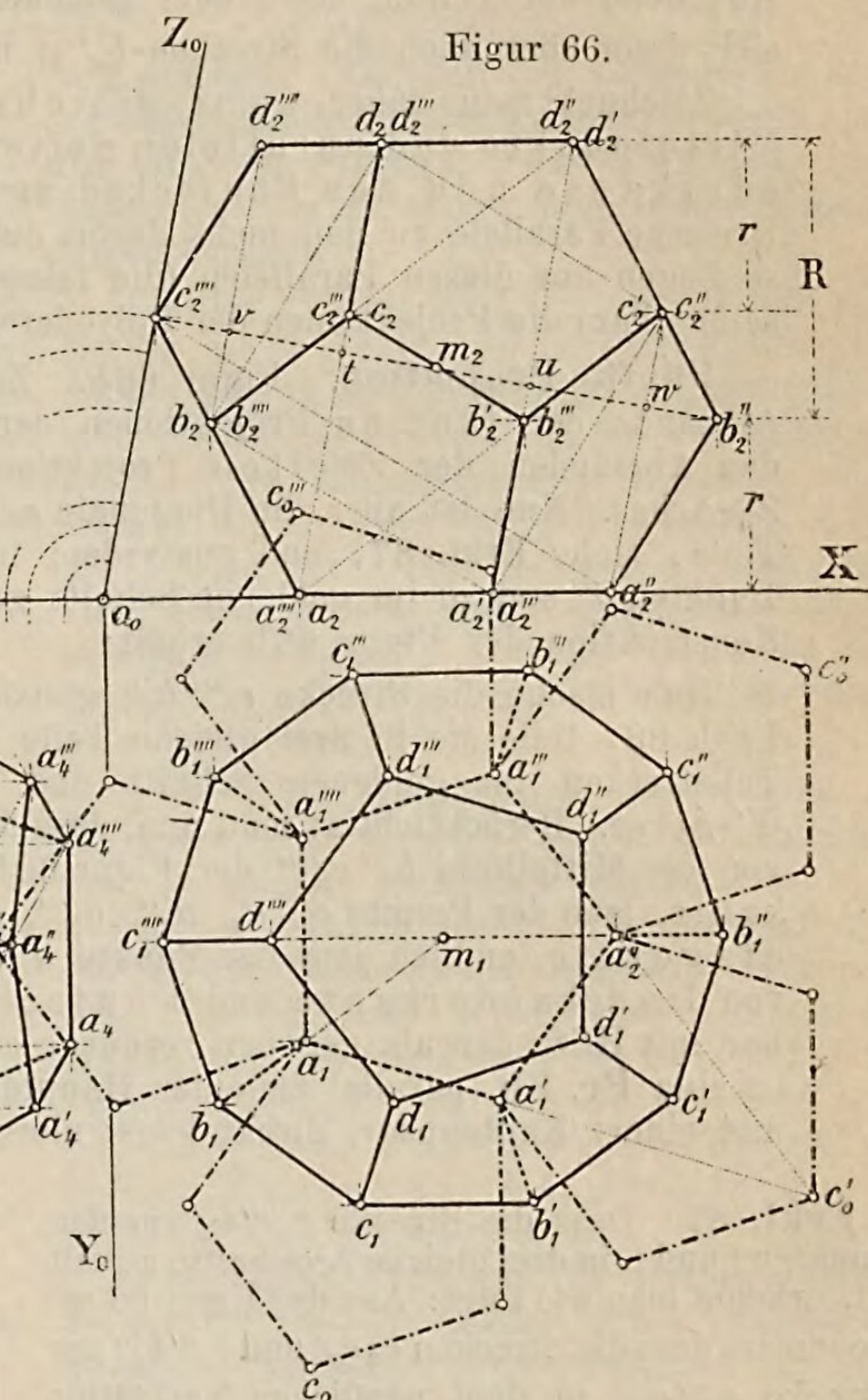
In den Figuren 66a und 66b sind zwei weitere Projektionen, die eine, vierte, in eine **Pr. Eb.** E_4 senkrecht zur Diagonale $b'c''''$, die andere, fünfte, in eine **Pr. Eb.** E_5 , parallel zu $b'c''''$ und senkrecht zur **Pr. Eb.** E_5 gezeichnet.

Behufs Zeichnung des Netzes bemerke man, dass die an das Fünfeck a_1 bis a_1'''' sich anschliessenden kongruenten Fünfecke selbst ein reguläres Fünfeck $c_0 c_0' c_0'' \dots c_0''''$ umschliessen, dessen umschriebener Kreis durch den Schnittpunkt c_0' zweier nicht aufeinanderfolgender Seiten des Fünfecks $a_1 a_1'''' \dots$ hindurchgeht. Die in der Figur 66 gezeichneten strichpunktirten Fünfecke einschliesslich des Fünfecks $a \dots a''''$ bilden das halbe Netz des Körpers.

Figur 66 b.



Figur 66 a



Figur 66.

Anmerkung 23. Jede der vier gezeichneten Projektionsformen lässt sich ähnlich wie beim Ikosaëder direkt und unabhängig von den übrigen konstruieren, und zwar wie folgt:

Erste Projektion. Man zeichne das regelmässige Fünfeck $a_1 \dots a_1''''$ mit der Seitenlänge gleich l , umschreibe demselben einen Kreis, teile dessen Halbmesser $m_1 a_1 = r$ im goldenen Schnitt und verlängere $m_1 a_1$ um den grösseren Abschnitt nach $m_1 b_1$. Ein zweiter Kreis mit dem Halbmesser $m_1 b_1 = R$ enthält die Projektionen der Umrisspunkte des Dodekaëders als Ecken eines regelmässigen Zehnecks.

Zweite Projektion. Zunächst erkennt man die Figur $a_2' c_2' d_2 b_2 a_2'$ als Quadrat mit der Fünfecksdiagonale als Seite. Da nun die Linie $c_2 b_2'$ durch den Mittelpunkt m_2 des Quadrates parallel zu der Seite $b_2 a_2'$ und gleich der Fünfecksseite (Dodekaëderkante) läuft, so kann man sich von der zweiten Projektion unmittelbar die sechs Punkte $a_2' c_2' d_2 b_2 c_2$ und b_2' verschaffen, wodurch sich dann die Punkte d_2' und a_2 im Schnitt der Verbindungslinien $b_2 c_2$ und $a_2' b_2'$ bzw. $d_2 c_2$ und $c_2' b_2'$ ergeben.

In mehrfacher Weise können nun die noch fehlenden Punkte $d_2''''c_2''''a_2''b_2''$ ermittelt werden. Infolge der bekannten Längen $c_2''''d_2''''$ und $a_2''b_2''$ gleich l und des Umstandes, dass die Punkte $a_2'a_2''$, c_2c_2'' , d_2'''' , ebenso $c_2'c_2''$, c_2c_2'' , c_2'''' je in einer Geraden liegen, ist die Lage der Punkte c_2'''' und d_2'''' bestimmbar.

Vierte Projektion. Zu ihrer direkten Herstellung beachte man, dass die Punkte c_4' , c_4'' und a_4'' , siehe Figur 66 a, die Endpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden mit der Länge der Fünfecksdiagonale als Seite. Zeichnet man ferner das gleichseitige Dreieck pqr parallel zu den in wahrer Grösse sich darstellenden Kantenprojektionen, so liegen die beiden Dreiecke $c_4'c_4''a_4''$ und pqr so, dass ihre Seiten beziehungsweise parallel laufen, ihre Mittelpunkte sich decken und die Längen paralleler Seiten sich verhalten wie die Fünfecksdiagonale zur Fünfecksseite, d. h. entsprechend der Teilung nach dem goldenen Schnitt; in der gleichen Weise verhalten sich dann aber auch die Strecken $b_4''p$ und $b_4''c_4'$.

Zeichnet man daher zwei gleichseitige Dreiecke mit gemeinsamem Mittelpunkte und parallelen Seiten entsprechend der Länge der Dodekaöderkante und der Fünfecksdiagonale, und zieht durch die Ecken dieser Dreiecke Parallele zu den nicht durch die betreffenden Ecken gehenden Dreieckshöhen, so liegen auf diesen Parallelen (die feinpunktierten Linien der Figur 66a stellen dieselben dar) die Projektionen der Polyedereckpunkte so verteilt, wie die Figur 66a zeigt.

Fünfte Projektion. Figur 66b. Zunächst ersieht man, dass in Figur 66b die Abstände der fünften Projektionen der Eckpunkte von der Y' -Achse gleich sind den Abständen der zweiten Projektionen der entsprechenden Eckpunkte von der Z_0 -Achse. Nun ist aber die Diagonale $c_2''''b_2''$ in den Punkten t und u in drei gleiche Teile, siehe Erkl. 87, und ausserdem in den beiden äusseren Teilstrecken in den Punkten v und w im goldenen Schnitt geteilt, so dass man nunmehr folgende direkte Konstruktion der Figur 66b erhält:

Man mache die Strecke $c_5''''b_5''$ gleich der Länge der Dodekaöderdiagonale, siehe Erkl. 88, teile sie in drei gleiche Teile und teile überdies noch die beiden äusseren Teilstrecken im goldenen Schnitt und ziehe durch die Teilpunkte Parallele zur Y' -Achse. Berücksichtigt man nun, dass die Entfernungen der Punkte b_5' , a_5' , d_5'' , c_5'' , von der Mittellinie $b_5''c_5''$ der Figur 66b gleich der Länge der Dodekaöderkante, jene der Punkte c_5' , a_5' , d_5'' , b_5'' , c_5'' , a_5'' , $d_5''''b_5''''$ gleich der Fünfecksdiagonale, endlich jene der Punkte d_5' , a_5'' , d_5' , a_5'' gleich der halben Summe von Dodekaöderkante und Fünfecksdiagonale betragen, so kann man offenbar mit Hilfe der als gegeben vorausgesetzten Kantenlänge die Projektion des Körpers in eine **Pr. Eb.** parallel zu einer Hauptdiagonale, siehe Antw. der Frage 41, No. 4, und einem Kantenpaar, direkt konstruieren.

Erkl. 87. Dass die Strecke $c_2''''b_2''$ in den Punkten t und u in drei gleiche Abschnitte geteilt ist, erkennt man wie folgt: Aus der Figur 66 ersieht man, dass die Strecken a_2a_2' und $b_2''''b_2''$ zur Strecke $a_2''a_2''$ in dem nämlichen Verhältnis stehen, d. h. einander gleich sind. Ausserdem ist aber auch die Strecke $d_2d_2' = c_2''''c_2''$, wodurch die Gleichheit der Strecken $c_2''''t$, tu und ub_2'' bedingt ist; da ferner die Linien b_2d_2'' und $a_2''c_2''$ parallel zu den Linien c_2d_2 und $a_2''b_2''$ sind, so folgt hieraus die Teilung der Strecken $c_2''''t$ und $b_2''u$ in den Punkten v und w nach dem goldenen Schnitt.

Erkl. 88. Die Länge der Diagonale $c_2''''b_2''$ erhält man aus der Kantenlänge sehr einfach als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten gleich sind der Kantenlänge und der Summe der Kantenlänge und der Fünfecksdiagonale, siehe das rechtwinklige Dreieck $c_2''''b_2''a_2''$ Figur 66, zweite Projektion.

Erkl. 89. Hätte man die vierte Projektion, siehe Figur 66 a, direkt konstruiert, so liessen sich aus derselben die zur Konstruktion der Figur 66 b erforderlichen Abstände h , h' und h'' gleichfalls entnehmen, und zwar ist die Strecke $\overline{c_4'''b_4'''} = h$, $\overline{c_4'''c_4''} = h'$ und $\overline{c_4''d_4''''} = h'' = h + h'$. — Man beweise diese Gleichheiten.

Frage 41. Welche wichtigen Eigenschaften leiten sich aus den in den Antworten der Fragen 37 bis 40 durchgeführten Konstruktionen für die regulären Polyeder ab?

Erkl. 90. Bezeichnen R , r und ρ die Halbmesser der den regulären Körpern beziehungsweise um-, ein- und anbeschriebenen Kugeln, so lassen sich die Werte der genannten Halbmesser aus den Projektionsformen der Körper entweder unmittelbar entnehmen oder doch leicht ableiten und durch den Wert l der Kantenlänge ausdrücken.

Für das Tetraëder entnimmt man der Figur 62 unmittelbar die Beziehungen:

$$R = \overline{m_2 d_2} = \frac{l}{4} \cdot \sqrt{6} = 0,6123724 \cdot l$$

$$r = \overline{m_2 n} = \frac{1}{3} R = \frac{l}{12} \cdot \sqrt{6} = 0,2041241 \cdot l$$

$$\rho = \frac{1}{2} \overline{a_2 o} = \frac{l}{4} \cdot \sqrt{6} = 0,3535534 \cdot l$$

Für das Oktaëder, siehe Figur 63, erhält man:

$$R = \overline{m_2 c_2} = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{2} = 0,707107 \cdot l$$

$$r = \frac{\text{d. halb. Höhe d. Rhomb. } c_2 d_2 e_2 b_2}{\text{d. Rhomb.}} = \frac{l}{6} \cdot \sqrt{6} = 0,408248 \cdot l$$

$$\rho = \overline{m_2 a_2} = \frac{l}{2} = 0,5 \cdot l$$

Für das Ikosaëder, siehe Figur 64, erhält man:

$$R = \overline{m_2 b_2} = \frac{l}{4} \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 0,95106 \cdot l$$

$$r = \overline{m_2 n} = \frac{l}{12} \cdot (3\sqrt{3} + \sqrt{15}) = 0,755761 \cdot l$$

$$\rho = \overline{m_2 a_2} = \frac{l}{4} \cdot (1 + \sqrt{5}) = 0,809017 \cdot l$$

Für das Hexaëder, siehe Figur 65, erhält man:

$$R = \overline{m_2 h_2} = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3} = 0,8660254 \cdot l$$

$$r = \frac{l}{2} \overline{a_1 b_1} = \frac{l}{2} = 0,5 \cdot l$$

$$\rho = \overline{m_1 a_1} = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{2} = 0,707107 \cdot l$$

Antwort. Aus den im Vorangegangenen durchgeführten Konstruktionen erkennt man für die regulären Polyeder mit Ausnahme des Tetraëders unmittelbar folgende Eigenschaften:

1) Jeder Fläche der Körper entspricht eine zu ihr parallele Gegenfläche; die Abstände von je zweien parallelen Gegenflächen sind einander gleich und die Verbindungslinien ihrer Mittelpunkte schneiden sich sämtlich in einem Punkte m , dem Mittelpunkte des Körpers. Es lässt sich somit jedem der Körper eine Kugel einbeschreiben, welche dessen Begrenzungsflächen in deren Mittelpunkten berührt.

2) Zu jeder Körperkante gehört eine zu ihr parallele Gegenkante; die Abstände von je zweien parallelen Gegenkanten sind einander gleich und die Verbindungslinien der Halbpunkte zweier Gegenkanten schneiden sich sämtlich gleichfalls in dem Mittelpunkte m des Körpers. Es gibt somit eine weitere dem Körper anbeschriebene Kugel, welche die sämtlichen Kanten des Körpers in deren Mittelpunkten berührt.

3) Die Endpunkte von je zweien Gegenkanten bilden die Ecken eines Rechtecks, dessen Diagonalen einander gleich sind und sich im Mittelpunkte m des Körpers begegnen. Somit ist eine dritte dem Körper umbeschriebene Kugel vorhanden, auf welcher sich die Ecken des Körpers befinden.

4) Je zwei auf einem Durchmesser der unter 3) genannten Kugel befindlichen Körperecken heissen Gegenecken und ihre Verbindungslinie ist eine Hauptdiagonale des Körpers. Sämtliche Hauptdiagonalen sind von gleicher Länge.

5) Die unter 1) bis 3) genannten Kugeln sind auch beim Tetraëder vorhanden, doch besitzt dasselbe weder parallele Flächen, noch Kanten, noch Gegenecken und sohin auch keine Hauptdiagonalen.

Für das Dodekaeder, siehe Figur 66, erhält man:

$$R = \frac{1}{2} \overline{b_2'' c_2''''} = \frac{l}{4} \cdot (1 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{3} = 1,401259 \cdot l$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} \text{Entf.}}{\text{d. b. Fl.} = \frac{l}{4} \cdot \sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}} = 1,113516 \cdot l$$

$a \dots u. d \dots$

$$\rho = \overline{m_2 a_2} = \frac{l}{4} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = 1,309017 \cdot l$$

(Siehe auch Kleyer's Lehrbuch der Körperberechnungen, erstes Buch, Seite 129—214.)

Erkl. 91. Die Mittelpunkte der Begrenzungsflächen eines jeden der fünf regulären Polyeder gehören der dem Polyeder einbeschriebenen Kugel an und bilden die Ecken eines zweiten regulären Polyeders, den man den polaren oder reciproken Polyeder des ersteren nennt.

Wie man sich leicht überzeugt, gehört dem Tetraeder als reciproker Körper wieder ein Tetraeder an. Dem Oktaeder entspricht reciprok das Hexaeder; dem Ikosaeder entspricht reciprok das Dodekaeder.

Erkl. 91a. Man erhält den reciproken Körper zu einem gegebenen regulären Körper auch dadurch, dass man in den Eckpunkten des Körpers an die dem Körper umbeschriebene Kugel Berührebenen legt und deren Schnittlinien unter sich aufgesucht denkt. Jeder Ecke des einen Körpers entspricht reciprok eine Fläche des anderen Körpers und umgekehrt. Der reciproke Körper besitzt stets so viele Seitenflächen als der ursprüngliche Körper Ecken hat. Stossen an jeder Ecke des einen Körpers n -Flächen zusammen, so entspricht der n -seitigen Ecke reciprok immer eine n -kantige Fläche.

Erkl. 92. Nimmt man ein reguläres Tetraeder als gegeben an, so lassen sich aus demselben sämtliche übrigen regulären Polyeder in einfacher Weise ableiten:

Verbindet man nämlich die Mittelpunkte der Kanten in den Flächen des Tetraeders miteinander, so bilden die Verbindungslinien die Kanten eines Oktaeders, dem reciprok, siehe Erkl. 88, das Hexaeder entspricht; aus dem Hexaeder erhält man aber das Dodekaeder wie folgt:

Verbindet man die Mittelpunkte paralleler Seitenflächen eines Hexaeders, und verlängert diese Verbindungslinien über die Flächenmittelpunkte hinaus um den kleineren Abschnitt der im goldenen Schnitt getheilten halben Hexaederkante, so geben die so erhaltenen auf je einer dergenannten Verbindungslinien liegenden Punkte die Mittelpunkte von parallelen Dodekaederkanten, die beziehungsweise zu den Kanten des Hexaeders parallel laufen. Die Länge einer Dodekaederkante bestimmt sich als grösserer Abschnitt der im goldenen Schnitt getheilten

6) Die Verbindungslinie zweier Gegenecken, oder der Mittelpunkte von Gegenflächen und Kanten kann man auch eine Achse des Körpers nennen, weil hinsichtlich einer jeden dieser Linien die sämtlichen übrigen auf der Oberfläche des Körpers befindlichen Punkte symmetrisch angeordnet sind. Jedes der Polyeder, mit Ausnahme des Tetraeders, besitzt demnach drei Systeme von Achsen. Die Achsen jedes einzelnen Systemes sind einander gleich, die Achsen sämtlicher Systeme gehen durch den Mittelpunkt des Körpers und werden in demselben halbiert.

7) Das Tetraeder besitzt nur ein System von Achsen im obgenannten Sinne, nämlich die Verbindungslinien der Mittelpunkte seiner Begrenzungsflächen mit den gegenüberliegenden Ecken.

Hexaëderkante. Die so erhaltenen Punkte bilden im Verein mit den Ecken des Hexaëders die Ecken des Dodekaëders. Als reciproken Körper des Dodekaëders erhält man das Ikosaëder.

D) Ungelöste Aufgaben über reguläre Polyeder.

Aufgabe 43. Zwei Punkte a und b sind als Ecken eines regulären Tetraëders gegeben; eine weitere durch a gehende Kante soll

- a) zur **Pr. Eb.** E_1 parallel sein,
- b) mit ersterer einen Winkel von vorgeschriebener Grösse ($w_1 = 30^\circ$)

einschliessen.

Es sind die Projektionen des Tetraëders zu zeichnen.

Aufgabe 44. Zwei Punkte a und b sind als Gegenecken, siehe Antwort der Frage 41,

- a) eines Oktaëders,
- b) „ Ikosaëders,
- c) „ Hexaëders,
- d) „ Dodekaëders

gegeben; eine der durch a gehenden Kanten schliesse mit der **Pr. Eb.** E_1 oder E_2 einen Winkel von vorgeschriebener Grösse ein (w_1 bzw. $w_2 = 0^\circ$ oder 45°).

Es sind die Projektionen der unter a) bis d) genannten Körper zu zeichnen.

Aufgabe 45. Zwei Punkte a und b sind als Endpunkte der Kante eines regulären Körpers gegeben; eine der durch ab gehenden Seitenflächen schliesse mit der **Pr. Eb.** E_1 oder E_2 einen Winkel von vorgeschriebener Grösse ein (w_1 bzw. $w_2 = 0^\circ$ oder 60°).

Es sind die Projektionen des Körpers zu zeichnen.

Aufgabe 46. Ein Punkt a ist als Ecke eines regulären Körpers gegeben; eine der durch a gehenden Kanten schliesse mit den beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 Winkel von vorgeschriebener Grösse ein ($w_1 = 30^\circ$, $w_2 = 45^\circ$).

Ausserdem sei eine der diese Kante enthaltende Begrenzungsfläche gegen die **Pr. Eb.** E_1 unter vorgegebenem Winkel W_1 geneigt.

Es sind die Projektionen des Körpers zu zeichnen.

Aufgabe 47. Zwei Punkte a und b sind als Ecken eines regulären Tetraëders gegeben; die Verbindungslinie der beiden

anderen Ecken habe als erste Projektion eine Strecke gleich der halben Tetraëderkante.

Es sind die Projektionen des Tetraëders zu zeichnen.

Aufgabe 48. Zwei Punkte a und b sind als Ecken eines regulären Tetraëders gegeben; eine weitere Ecke c soll in einer gegebenen Ebene ST liegen.

Es sind die Projektionen des Tetraëders zu zeichnen.

Aufgabe 49. Zwei Punkte a und b sind als Gegenecken eines regulären Oktaëders gegeben; eine der übrigen nicht durch a oder b gehenden Kanten soll zur **Pr. Eb. E_1**

a) parallel sein,

b) mit ihr einen Winkel von vorgeschriebener Grösse einschliessen.

Es sind die Projektionen des Oktaëders zu zeichnen.

Aufgabe 50. Zwei Punkte a und b sind als Gegenecken

a) eines Oktaëders,

b) „ Ikosaëders,

c) „ Hexaëders,

d) „ Dodekaëders

gegeben; eine der übrigen Hauptdiagonalen schliesse mit einer der **Pr. Ebn. E_1** oder E_2 einen Winkel w von vorgeschriebener Grösse ein ($w = 0^\circ = 60^\circ$).

Es sind die Projektionen der unter a) bis d) genannten Körper zu zeichnen.

Aufgabe 51. Zwei Punkte a und b sind als die Endpunkte einer Kante

a) eines Oktaëders,

b) „ Ikosaëders,

c) „ Hexaëders,

d) „ Dodekaëders

gegeben; eine der Gegenecken zu a oder b soll in einer gegebenen Ebene ST liegen.

Es sind die Projektionen der unter a) bis d) genannten Körper zu zeichnen.

Aufgabe 52. Ein Punkt m ist als Mittelpunkt eines regulären Polyeders gegeben, von welchem eine Seitenfläche in eine gegebene Ebene ST falle; ausserdem soll

a) eine der in der Ebene ST liegenden Kanten unter vorgeschriebenem Winkel

gegen die **Pr. Eb.** E_1 oder E_2 geneigt sein oder

- b) eine der in der Ebene ST liegenden Ecken vorgeschriebenen Abstand von einer der **Pr. Ebn.** E_1 oder E_2 besitzen.

Es sind die Projektionen des Polyeders zu zeichnen.

Aufgabe 53. Ein Punkt m ist als Mittelpunkt eines regulären Polyeders gegeben; ausserdem soll

- a) eine seiner Kanten ab in eine gegebene Gerade A fallen,
 b) eine seiner Ecken a auf einer durch m gehenden Geraden A , eine zweite Ecke b auf einer zweiten beliebig gegebenen Geraden B liegen.

Es sind die Projektionen des Polyeders zu zeichnen.

Aufgabe 54. Die erste (zweite) Projektion der Seitenfläche eines regulären Tetraeders, Oktaeders oder Ikosaeders liegt als ein Dreieck der **Pr. Eb.** E_1 (E_2) gegeben vor. Der Mittelpunkt des Körpers soll gegebenen Abstand von der **Pr. Eb.** E_1 (E_2) haben.

Es sind die Projektionen der oben genannten Körper zu zeichnen.

Aufgabe 55. Die Projektionen der Endpunkte dreier an einer Ecke a zusammenstossenden Kanten eines Hexaeders oder Dodekaeders bilden die Ecken eines gegebenen Dreiecks der ersten (zweiten) **Pr. Eb.** Die Ecke a soll gegebenen Abstand von der bezüglichen **Pr. Eb.** haben.

Es sind die Projektionen der oben genannten Körper zu zeichnen.

E) Ueber die Konstruktion der Projektionen der sternförmigen regulären Polyeder.

Frage 42. Gibt es ausser den bisher genannten regulären Körpern nicht noch weitere reguläre Körper und aus welchen regulären Körpern leiten sich dieselben ab?

Antwort. Ausser den regulären platonischen Körpern gibt es noch weitere vier reguläre Körper, die sogenannten Sternpolyeder, welche sich aus dem regulären Dodekaeder und Ikosaeder ableiten lassen.

Frage 43. Welche Sternpolyeder lassen sich am einfachsten aus dem Dodekaëder ableiten?

Antwort. Aus dem Dodekaëder lassen sich ableiten:

- 1) das zwölfeckige Sterndodekaëder oder der zwölfeckige Sternzwölfflächner;
- 2) das Sternikosaëder oder der stern-eckige Zwanzigflächner.

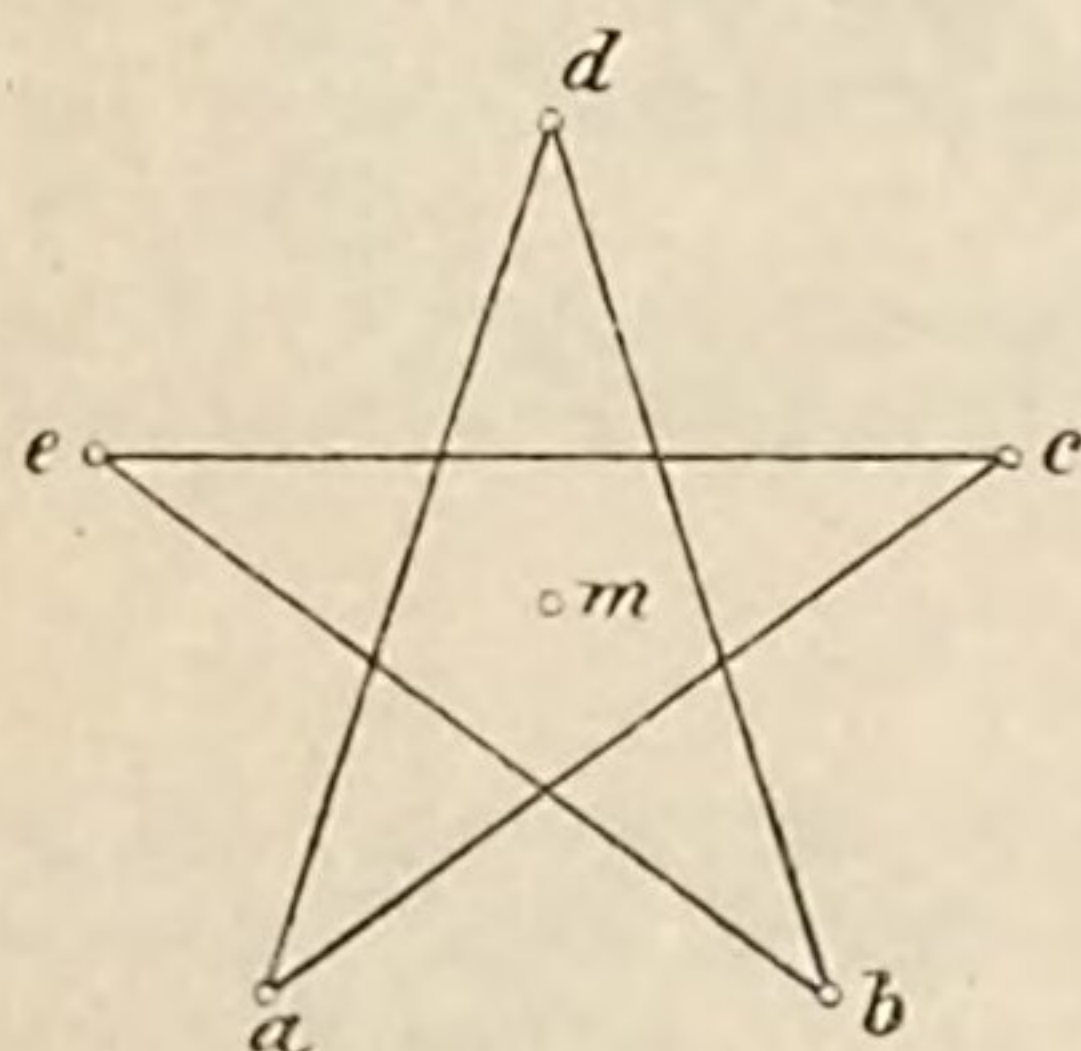
Frage 44. Welche Sternpolyeder lassen sich am einfachsten aus dem Ikosaëder ableiten?

Antwort. Aus dem Ikosaëder lassen sich ableiten:

- 1) das zwanzigeckige Sterndodekaëder oder der zwanzigeckige Sternzwölfflächner;
- 2) das sterneckige Sterndodekaëder oder der sterneckige Sternzwölfflächner.

Frage 45. Wie erhält man die beiden in der Antwort der Frage 43 genannten Sternpolyeder aus dem Dodekaëder?

Figur 67.



Antwort. Man denke sich die sämtlichen Kanten des Dodekaëders verlängert, so schneiden sich je zwei nicht aufeinanderfolgende Fünfecksseiten in Punkten, welche ein sogenanntes Fünfeck zweiter Art, ein Sternfünfeck, siehe Figur 67, bilden.

Solche Sternfünfecke sind somit in den zwölf Dodekaëderflächen im Ganzen zwölf vorhanden. Da aber jede Ecke eines Sternfünfecks fünfzehn Dodekaëderflächen zugleich angehört, so erhält man als Gesamtheit der Ecken des Sterndodekaëders $\frac{12 \cdot 5}{5} = 12$.

Diese zwölf Ecken bilden die Spitzen von zwölf regelmässigen Pyramiden mit den Flächen des Fundamentaldodekaëders als Grundflächen.

Die Spitzen von je dreien Pyramiden, deren Grundflächen durch drei an einer Dodekaëder-ecke zusammenstossenden Fünfecke gebildet sind, gehören einem gleichseitigen Dreiecke an, woraus unmittelbar folgt, dass die Ecken des Sterndodekaëders mit den Ecken eines regulären Ikosaëders zusammenfallen.

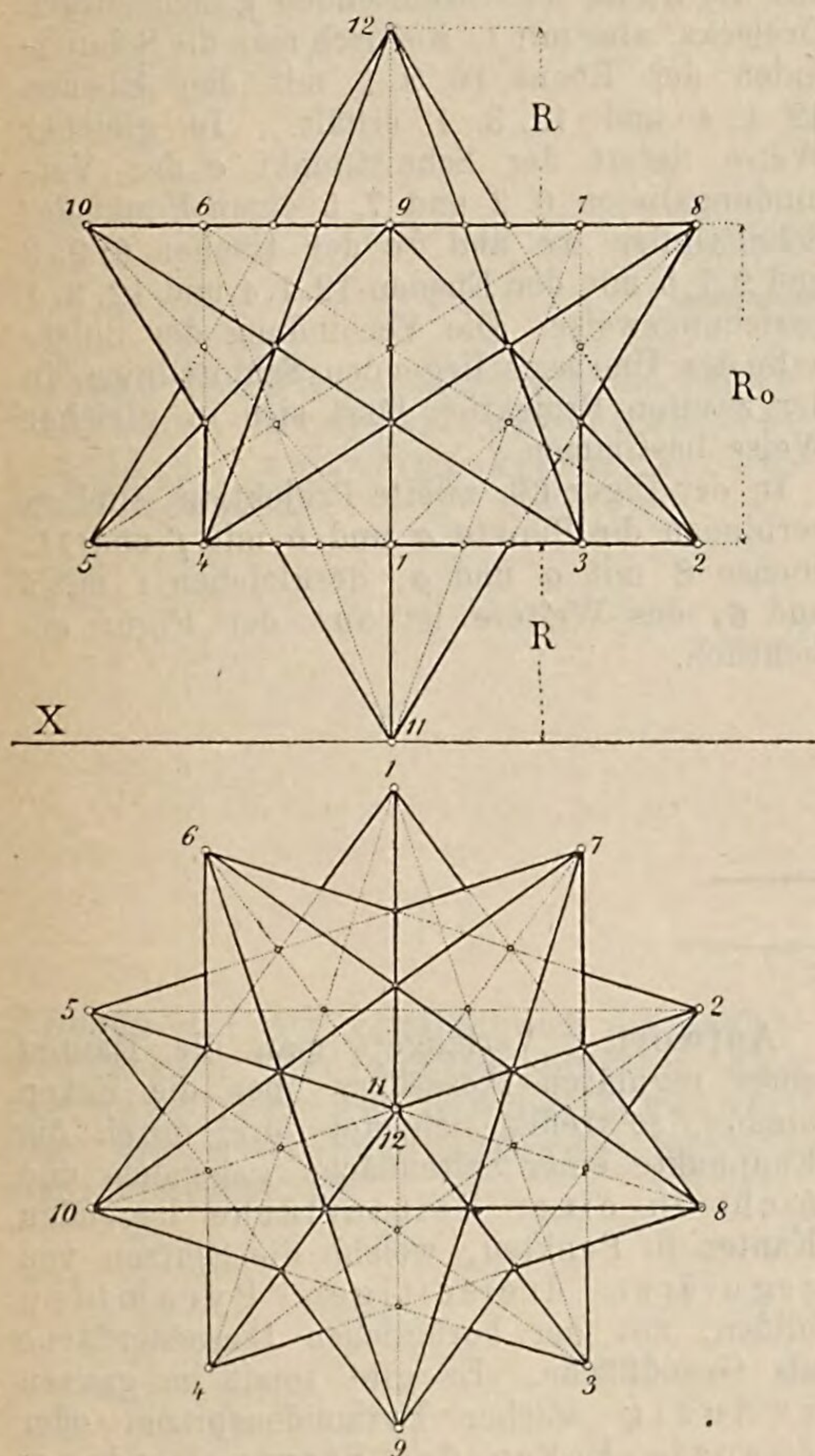
Das Sternikosaëder oder der stern-eckige Zwanzigflächner besitzt dieselben Ecken und Kanten wie das eben genannte Sterndodekaëder, doch fallen die Begrenzungsflächen nicht mit den Flächen des Fundamentaldodekaëders zusammen, sondern sind bestimmt durch die durch den

Ecken des Sternpolyeders und die Diagonale der Begrenzungsfünfecke des Fundamentaldodekaëders gelegten Ebenen. Diese Begrenzungsflächen bilden gleichseitige Dreiecke und da jede derselben drei Fünfecksdiagonalen enthält, so ist die Gesamtzahl der Flächen

$$\frac{12 \cdot 5}{3} = 20.$$

Frage 46. Wie gestalten sich die rechtwinkligen Projektionsformen des Sterndodekaëders?

Figur 68.



Antwort. Liegt das Fundamentaldodekaëder mit einem Paar Seitenflächen parallel zur **Pr. Eb. E_1** , siehe Figur 68, so befinden sich die in der Antwort der Frage 45 genannten Schnittpunkte nicht aufeinanderfolgender Polyederkanten mit Ausnahme von zweien derselben auf einem Kreise mit dem Halbmesser R_0 , während die Ecken des scheinbaren Umrisses oben genannten Dodekaëders einem zweiten Kreise mit dem Halbmesser R angehören, wobei R gleich dem grösseren Abschnitte des im goldenen Schnitt getheilten Halbmessers R_0 ist.

Man erhält auf Grund des eben Gesagten folgende Konstruktion der Projektionen des Sterndodekaëders:

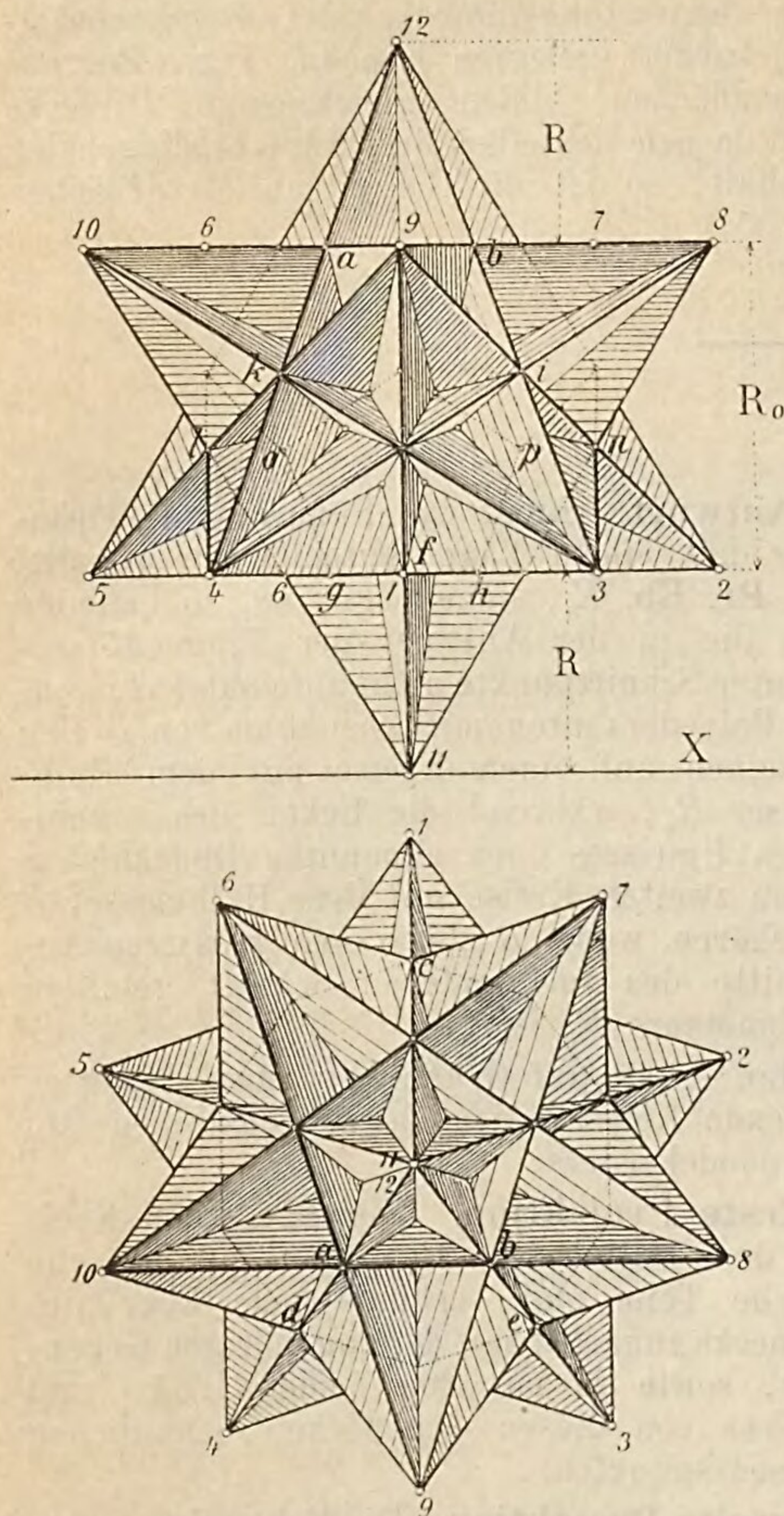
Erste Projektion. Zeichne einen Kreis mit dem Halbmesser R_0 , theile ihn in zehn gleiche Teile und verbinde jede Ecke des Zehnecks zunächst mit der zugehörigen Gegenecke, sowie je mit den beiden links und rechts von diesen Gegenecken befindlichen Zehneckspunkten.

Zweite Projektion. Die Eckpunkte liegen in Entfernungen von der X -Achse gleich R , $R_0 + R$ und $R_0 + 2R$. Die Verbindung geschieht in derselben Weise wie bei der ersten Projektion.

Frage 47. Wie gestalten sich die rechtwinkligen Projektionsformen des regulären Sternikosaëders oder des zwölfeckigen Zwanzigflächners?

Antwort. Die 12 Ecken 1 bis 12 und deren Verbindung mit einander bleibt dieselbe wie in Figur 68.

Figur 69.



Nimmt man nun eine Fläche des Fundamentaldodekaëders, z. B. jene über der Kante ab , siehe Figur 69, heraus, so entspricht dieser Fläche die Ecke 12 des Sternkörpers und die in der Ecke 12 zusammenstossenden und sich durchschneidenden Ebenen sind die Ebenen 12. 5. 2, 12. 1. 4, 12. 5. 3, 12. 4. 2, 12. 3. 1; ausserdem gehen durch die Kanten der genannten Dodekaëderfläche noch weitere fünf für die erste Projektion sichtbare Ebenen: 10. 8. 1, 9. 7. 5, 8. 6. 4, 7. 10. 3, 6. 9. 2. Die gegenseitigen Durchschnittslinien sind nun in einfacher Weise zu erhalten durch Verbindung der Endpunkte jeder Dodekaëderkante, z. B. ab , einmal mit der dritten Ecke des die Kante ab enthaltenden gleichseitigen Dreiecks, also mit 1, wodurch man die Schnittlinien der Ebene 10. 8. 1 mit den Ebenen 12. 1. 4 und 12. 3. 1 erhält. In gleicher Weise liefert der Schnittpunkt c der Verbindungslinien 6. 2 und 7. 5 einen Punkt der Schnittlinien ac und bc der Ebenen 6. 9. 2 und 9. 7. 5 mit den Ebenen 12. 1. 4 und 12. 3. 1 beziehungsweise. Die Verbindung der innerhalb des Umrisses liegenden Schnittlinien in der zweiten Projektion lässt sich in gleicher Weise bestimmen.

In der Figur 69, zweite Projektion, sind zu verbinden die Punkte a und b mit f und 11, ebenso 8 mit o und g , desgleichen i mit l und 6; das Weitere ist aus der Figur ersichtlich.

Frage 48. Wie erhält man die beiden in der Antwort der Frage 44 genannten Sternpolyeder aus dem Ikosaëder?

Antwort. Verlängert man die Kanten eines regulären Ikosaëders über die Ecken hinaus, so treffen sich stets drei durch die Endpunkte einer Seitenfläche gehenden und nicht in einer Seitenfläche liegenden Kanten in Punkten, welche die Spitzen von regulären dreiseitigen Pyramiden bilden, mit der bezüglichen Ikosaëderfläche als Grundfläche. Es gibt somit im ganzen zwanzig solcher Pyramidenspitzen oder zwanzig Ecken des Sternpolyeders; weshalb dasselbe auch das zwanzigeckige Sterndodekaëder oder der zwanzigeckige Sternzwölfflächner genannt wird. Diese Pyramiden fallen mit den fünfeckigen Diagonalfächen des Ikosaëders zusammen und es wird somit der Körper im ganzen $\frac{20 \cdot 3}{5} = 12$ Flächen besitzen, welche Fünfecke zweiter

Art bilden, siehe Antw. der Frage 45, sowie Figur 68, wie z. B. das Fünfeck 11. 14. 4. 1. 3. 11, Figur 70, erste Projektion.

Die Spitzen von je fünf Pyramiden, deren Grundflächen durch fünf aufeinanderfolgende Ikosaederflächen gebildet sind, gehören einem regulären Fünfeck erster Art an, woraus unmittelbar folgt, dass die Eckpunkte des zwanzigeckigen Sterndodekaeders zugleich als Ecken eines gewöhnlichen Dodekaeders genommen werden können.

Das sternzwölfeckige Sterndodekaeder oder der sternzwölfeckige Sternzwölfflächner entsteht gleichfalls in einfacher Weise aus dem Ikosaeder, indem man dessen fünfeckige Diagonalfächen als Begrenzungsflächen des Körpers auffasst. Derselbe besitzt daher die Ecken und Kanten des Ikosaeders als Ecken und Kanten und dessen zwölf Diagonalfächen, die sich noch ausserdem nach einer Anzahl von Geraden durchschneiden, als Begrenzungsflächen.

Frage 49. Wie gestalten sich die rechtwinkligen Projektionsformen des regulären zwanzigeckigen Sterndodekaeders?

Antwort. Man zeichne ein reguläres Ikosaeder, in Figur 70 durch fein punktierte Linien dargestellt, und verlängere dessen Kanten, wie in der Antw. der Frage 45 gesagt wurde, oder man zeichne ein reguläres Dodekaeder und verbinde dessen Eckpunkte, wie in Figur 70 geschehen.

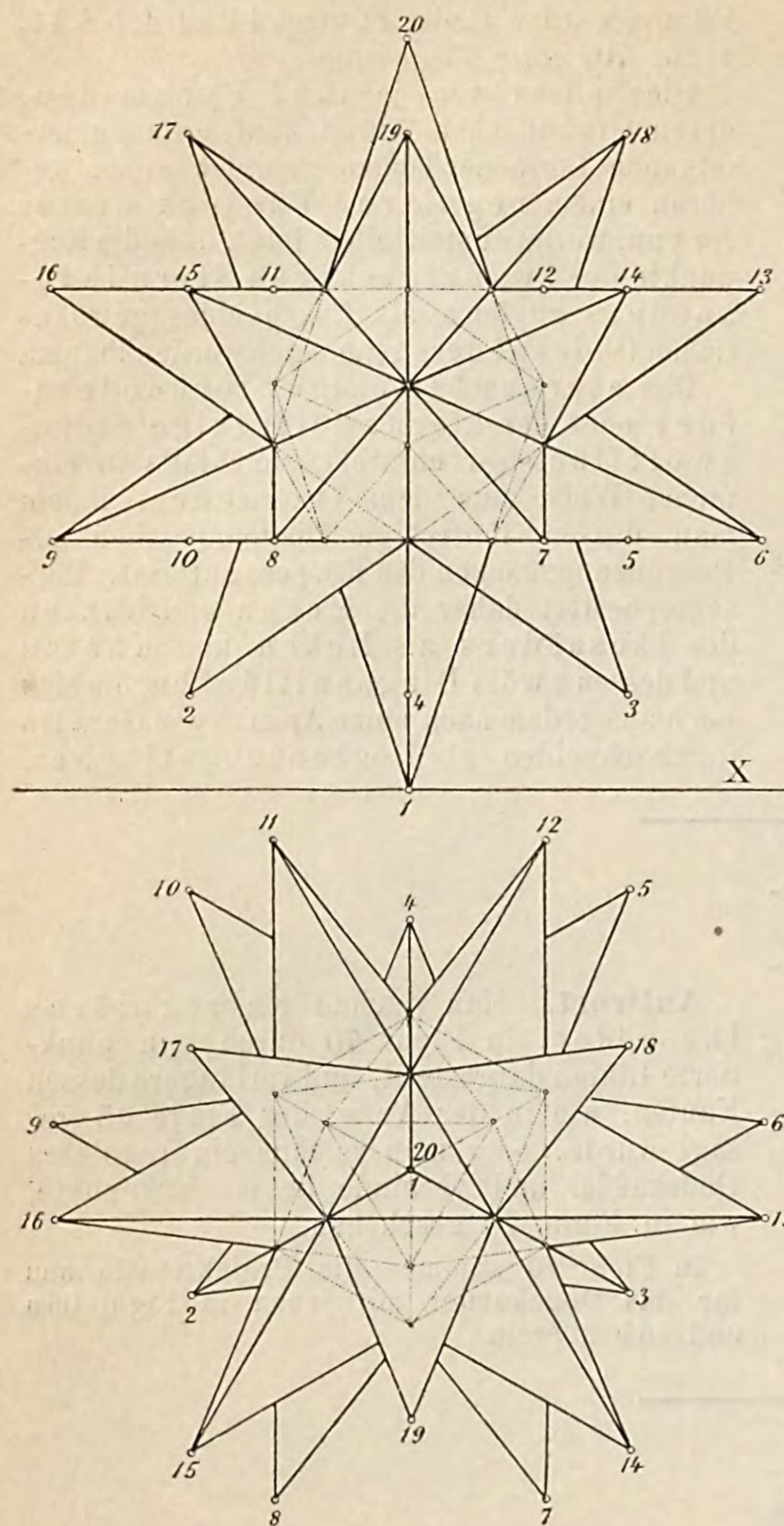
In Figur 70 stimmen die Projektionsformen für das Dodekaeder mit jenen in Figur 66a und 66b überein.

Frage 50. Wie gestalten sich die rechtwinkligen Projektionsformen des sternzwölfeckigen Sterndodekaeders oder des sternzwölfeckigen Sternzwölfflächners?

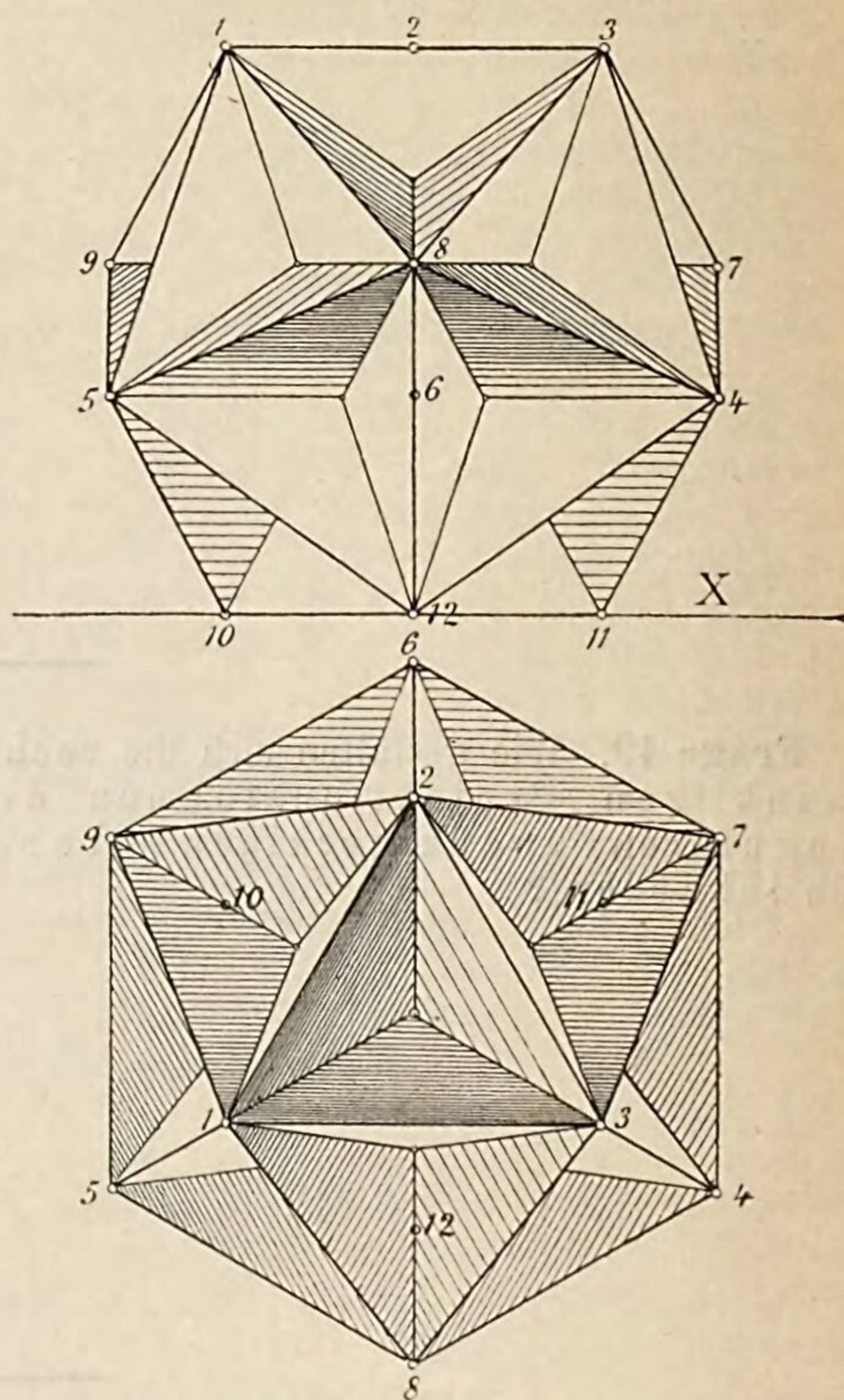
Antwort. Man zeichne, siehe Figur 71, die Projektionen des regulären Ikosaeders und ziehe in dessen Diagonalfünfecken, wie z. B. im Fünfeck 1. 3. 7. 6. 9 (erste Projektion) oder 1. 5. 12. 4. 3 (zweite Projektion) die Diagonalen, so bestimmen diese die noch innerhalb des Umrisses auftretenden Schnittlinien der Begrenzungsflächen.

Anmerkung 24. Mit Bezugnahme auf das in Erkl. 91 und 91a Gesagte stehen auch die im Vorangegangenen vorgeführten vier Sternpolyeder in einer reciproken Beziehung zu einander, insofern dem zwölfeckigen Sterndodekaeder, siehe Figur 68, reciprok das sterneckige Sterndodekaeder, siehe Figur 71, dergleichen dem zwanzigeckigen Sterndodekaeder, siehe Figur 70, reciprok das Sternikosaeder, siehe Figur 69, entspricht.

Figur 70.



Figur 71.



Anmerkung 25. Die in den vorangehenden Fragen und Antworten näher behandelten sternförmigen Polyeder rühren theils von Keppler, theils von Poincaré her und führen im allgemeinen die Bezeichnung „Poincaré'sche Polyeder“.

F) Ueber die halbregulären Körper.

Frage 51. Gibt es ausser den bisher kennen gelernten Polyedern auch noch weitere Polyeder mit regulären Begrenzungsflächen?

Erkl. 93. Die Entdeckung fraglicher Körper rührt von dem berühmten griechischen Mathematiker Archimedes von Syrakus, gest. 212 v. Chr., her, daher die Bezeichnung „archimedische Polyeder“.

Antwort. Ausser den regulären Polyedern gibt es noch Polyeder, welche von regulären Flächen von verschiedener Seitenzahl begrenzt sind, nämlich die sogenannten halb-regulären oder archimedischen Polyeder, siehe Erkl. 93.

Frage 52. Was versteht man unter einem archimedischen Polyeder?

Antwort. Ein archimedisches Polyeder ist ein Polyeder mit kongruenten körperlichen Ecken, in welchen je eine bestimmte Anzahl von regulären Vielecken mit verschiedener Seitenzahl aneinander stossen.

Frage 53. Wie erkennt man das Vorhandensein solcher regulärer Polyeder?

Erkl. 94. Stossen in jeder Ecke m Kanten zusammen, so ist die Gesamtzahl aller Kanten offenbar gleich $\frac{m \cdot e}{2}$, da jede Kante als Verbindungslinie zweier Ecken zweimal zu zählen ist, es ist somit:

$$2k = m \cdot e.$$

Erkl. 95. Mittels des Euler'schen Satzes lässt sich in einfacher Weise die Beziehung feststellen, welche zwischen der Anzahl der Kanten und jener der Flächen eines Polyeders besteht:

Es ist ja:

$$e + f = k + 2 \text{ und da}$$

$$2k = m \cdot e$$

ist, siehe Erkl. 94, so folgt:

$$m \cdot e = 2e + 2f - 4$$

$$e = 2 \cdot \frac{f-2}{m-2} \dots, 2k = \frac{2m \cdot (f-2)}{m-2}$$

Da nun m nur die Werte 3, 4 und 5 annehmen kann, siehe Erkl. 97, so ergeben sich für den oben genannten Zusammenhang folgende Gleichheiten:

$$m=3; 2k = \frac{2 \cdot 3 \cdot (f-2)}{3-2}; 2k = 6 \cdot (f-2)$$

$$m=4; 2k = \frac{2 \cdot 4 \cdot (f-2)}{4-2}; 2k = 4 \cdot (f-2)$$

$$m=5; 2k = \frac{2 \cdot 5 \cdot (f-2)}{5-2} = \frac{10}{3} \cdot (f-2)$$

Antwort. Das Vorhandensein von archimedischen Polyedern lässt sich in einfacher Weise wie folgt nachweisen:

Bezeichnet m die Anzahl der Flächen, welche an jeder Ecke zusammenstossen, ferner a, b, c die Anzahl der Seiten der die Ecke bildenden Vielecke, endlich α, β, γ die Anzahl der a -, b - und c -Ecke, die an jeder Körperecke sich vereinigen, so sind folgende Beziehungen leicht erkennbar:

Es ist:

$$2k = m \cdot e, \text{ siehe Erkl. 94,}$$

oder da:

$$m = (\alpha + \beta + \gamma \dots) \text{ ist,}$$

$$2k = (\alpha + \beta + \gamma \dots) \cdot e \dots \dots \dots 33)$$

Die Anzahl der möglichen Flächen für ein Polyeder mit den oben genannten Begrenzungsflächen ist nun:

$$f = \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \dots \right) \cdot e \dots 34)$$

Ausserdem gilt, siehe Erkl. 23, der Euler'sche Satz:

$$2e + 2f = 2k + 4$$

oder:

$$2f - 2k + 2e = 4$$

welche Gleichung mit Bezugnahme auf die Gleichungen 33 und 34 übergeht in folgende:

$$\left(\frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} + \frac{2\gamma}{c} - (\alpha + \beta + \gamma \dots) + 2 \right) \cdot e = 4 \dots 35)$$

als Bedingungsgleichung für das Vorhandensein eines Polyeder mit e Ecken, in welchen je αa -Ecke, βb -Ecke, γc -Ecke etc. zusammenstossen.

Die Gleichung 35 lässt sich auch so schreiben:

$$2 - \alpha + \frac{2}{a} - \beta + \frac{2}{b} - \gamma + \frac{2}{c} \dots = 4$$

oder:

$$\left(2 - \left(\frac{\alpha \cdot (a-2)}{a} + \frac{\beta \cdot (b-2)}{b} + \frac{\gamma \cdot (c-2)}{c} + \dots \right) \right) \cdot e = 4 \dots \dots 36)$$

Erkl. 96. Die Anzahl der Polygonwinkel auf der Oberfläche eines jeden Polyeders ist gleich der doppelten Anzahl der Körperkanten und kann **nie kleiner** sein als die **dreifache Anzahl der Ecken oder Flächen**, weil jede Fläche so viele Polygonwinkel besitzt, als sie Kanten hat, jede Kante aber zweien Flächen angehört, und weil jede Fläche oder Ecke des Polyeders aus mindestens dreien Polygonwinkeln zusammengesetzt sein muss.

Es ist also:

$$\left. \begin{array}{l} w = 2k \\ w = 3f \\ w > 3e \end{array} \right\} \dots\dots\dots 37.$$

Erkl. 97. Aus den obengenannten Beziehungen folgt mit Bezug auf den Eulerschen Satz noch die weitere Gleichung:

$$3k + 6 = 3e + 3f \dots\dots\dots 38)$$

Nimmt man nun von der linken Seite $2k$, von der rechten Seite aber $3f$ oder $3e$ hinweg, so sind für die Grösse des Restes zwei Möglichkeiten vorhanden.

Entweder ist:

$$2k = 3e \text{ oder } = 3f$$

oder es ist:

$$2k > 3e \text{ oder } > 3f.$$

Im ersten Falle wird auf beiden Seiten der Gleichung 38 gleichviel weggenommen, so dass die Gleichheit übrig bleibt:

$$k + 6 = 3e \text{ oder } = 3f \dots\dots\dots 39)$$

Im zweiten Falle wird auf der linken Seite mehr hinweggenommen als auf der rechten, und es bleibt übrig die Ungleichheit:

$$k + 6 < 3e \text{ oder } < 3f \dots\dots\dots 40)$$

Beide Ausdrücke 39 und 40 lassen sich in den folgenden vereinigen:

$$k + 6 = 3e \text{ oder } = 3f \dots\dots\dots 41)$$

Aus der zuletzt erwähnten Ungleichheit kann man schliessen, dass es kein Polyeder mit lauter sechs- oder mehrseitigen Flächen oder Ecken geben kann, denn es wäre ja für den Fall, dass sämtliche Flächen und Ecken sechsseitig sein sollten:

$$w = 6.e = 6.f$$

daher:

$$4k = 3e = 3f$$

was unmöglich ist, da im höchsten Fall $k + 6 = 3e = 3f$ sein kann.

Es kann somit m nur die Werte 3, 4 und 5 haben.

Damit die Gleichung 36 bestehen kann, muss der Subtrahend der linken Seite kleiner als zwei sein. Nun sind aber die kleinsten Werte, welche die im genannten Ausdrucke vorkommenden Grössen annehmen können:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

und

$$a = 3, b = 4, c = 5, d = 6 \dots\dots$$

Für die genannten Werte erhält nun der obengenannte Subtrahend folgenden Ausdruck:

$$\frac{3-2}{3} + \frac{4-2}{4} + \frac{5-2}{5} + \frac{6-2}{6} + \dots\dots$$

$$\text{oder} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \dots\dots$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6}$$

schon grösser als 2, daher kann ein Polyeder mit vier verschiedenen an einer Ecke zusammenstossenden regulären Flächen nicht vorhanden sein. Mit anderen Worten:

„Mit **zweien** oder höchstens **dreien** verschiedenen Arten von regulären Vielecken kann man **halbrekuläre** oder **archimedische** Polyeder bilden, dagegen gibt es kein archimedisches Polyeder, in dessen Ecken mehr als drei verschiedene reguläre Flächen zusammenstossen.“

Frage 54. Besteht zwischen den Zahlen α , β , γ , d. i. der Anzahl der in einer Ecke eines Polyeders vereinigten a -, b -, c -Ecke ein Zusammenhang und welcher?

Antwort. Ist eine der Zahlen a , b oder c ungerade, z. B. a , so kann man mit der ersten, dritten, fünften, ... n ten Seite eines a -Ecks je ein a -Eck vereinigen; es stoßen dann an einer Ecke mindestens drei a -Ecke aneinander; vereinigt man dagegen mit der ersten, dritten, fünften, ... n ten Seite eines a -Ecks je ein b - oder c -Eck, so stoßen mindestens an einer Ecke zwei b - oder c -Ecke aneinander, daher kann keine der Zahlen α , β , γ weniger als zwei betragen; man gewinnt somit folgenden Satz:

„Werden die Ecken eines archimedischen Polyeders in gleicher Weise von α a -Ecken, β b -Ecken, γ c -Ecken gebildet und ist eine der Zahlen a , b , c ungerade, so muss eine der Zahlen $\alpha - 1$, β , γ , mindestens 2 betragen.“

Frage 55. Welche Arten von archimedischen Polyedern erweisen sich nach dem Vorangegangenen als möglich?

Antwort. Es erweisen sich als möglich drei Gruppen von archimedischen Polyedern, nämlich solche mit drei-, vier- und fünfseitigen Ecken.

Frage 56. In welcher Weise sind die Ecken der archimedischen Polyeder der ersten Gruppe begrenzt?

Antwort. Wenn drei Flächen an jeder Ecke aneinandergrenzen, so können sich dieselben in zweierlei Weise gruppieren.

Es kann nämlich jede Ecke gebildet sein
a) von einem a -Eck und zwei b -Ecken, oder
b) von je einem a -Eck, einem b -Eck und einem c -Eck.

Frage 57. Von welchen Flächen sind die in der Antwort der Frage 56 unter a) bezeichneten Körperecken begrenzt?

Erkl. 98. Das Polyeder I ist unbestimmt zufolge der beliebig zu wählenden Zahl n ; es ist begrenzt von zwei n -Ecken und n -Quadraten.

Erkl. 99. Das Polyeder II, begrenzt von 4 Dreiecken und 4 Sechsecken, leitet sich in einfacher Weise aus dem regulären Tetraëder ab, durch Einbeschreibung von regulären Sechsecken in die Dreiecke des Tetraëders, oder was dasselbe ist, durch Dreiteilung der Tetraëderkanten und Verbindung der gleichnamigen Punkte in den Flächen des Tetraëders.

Antwort. Für die unter a) der Antwort der Frage 56 charakterisierte Körpergruppe nimmt die Gleichung 35 die Gestalt an:

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} - 1 \right) \cdot e = 4 \quad . \quad 42)$$

Sie lässt folgende Auflösungen zu:

	I	II	III	IV	V	VI
a	n	3	3	3	4	5
b	4	6	8	10	6	6
e	$2n$	12	24	60	24	60

Erkl. 100. Das Polyeder III, von 8 Dreiecken und 6 Achtecken begrenzt, leitet sich vom Hexaëder ab durch Einbeschreibung von regulären Achtecken in die Quadrate des Hexaëders.

Erkl. 101. Das Polyeder IV, von 20 Dreiecken und 12 Zehneckern begrenzt, leitet sich vom Dodekaëder ab durch Einbeschreibung von regulären Zehneckern in die Dodekaëderflächen.

Erkl. 102. Das Polyeder V, von 6 Quadraten und 8 Sechsecken begrenzt, entsteht aus dem Oktaëder durch Einbeschreibung von regulären Sechsecken in die Oktaëderflächen oder durch Dreiteilung der Oktaëderkanten und Verbindung der gleichnamigen Teilpunkte in den Flächen des Oktaëders.

Erkl. 103. Das Polyeder VI, von 12 Fünfecken und 20 Sechsecken begrenzt, entsteht aus dem Ikosaëder in der gleichen Weise, wie das Polyeder V aus dem Oktaëder.

Frage 58. Von welchen Flächen sind die in der Antwort der Frage 56 unter b) bezeichneten Körperecken begrenzt?

Ein jedes Polyeder dieser Gruppe besitzt $\frac{e}{a}$ a -Ecke und $\frac{2e}{b}$ b -Ecke als Begrenzungsflächen.

Es gibt sechs archimedische Polyeder der Gruppe a) mit dreiseitigen Ecken, siehe Erkl. 98 bis 103.

Antwort. Für die in der Antwort der Frage unter b) charakterisierte Körpergruppe nimmt die Gleichung 35 die Gestalt an:

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - 1\right) \cdot e = 4 \quad . \quad . \quad 43)$$

Sie lässt folgende Auflösungen zu:

	VII	VIII
<i>a</i>	4	4
<i>b</i>	6	6
<i>c</i>	8	10
<i>e</i>	48	120

Erkl. 104. Das Polyeder VII, von 12 Quadraten, 8 Sechsecken und 6 Achtecken begrenzt, ist sowohl aus dem Hexaëder, wie aus dem Oktaëder in einfacher Weise ableitbar.

Ableitung aus dem Hexaëder. Bezeichnet x die Kantenlänge des Polyeders VII, l die Kantenlänge des Hexaëders, so erkennt man aus der Figur 72 das Vorhandensein der folgenden Gleichungen:

Es ist:

$$\overline{qm} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cdot \mathbf{V}^2 = \frac{x}{2} \cdot (1 + \mathbf{V}^2)$$

$$\overline{mr} = \frac{x}{2} \cdot (\sqrt{2})$$

daher:

$$\frac{\overline{qm}}{\overline{qr}} = \frac{\frac{x}{2} \cdot (1 + \sqrt{2})}{\frac{x}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\overline{im}}{\overline{i, d_1}} \dots \dots \dots 44)$$

Ein jedes Polyeder dieser Gruppe besitzt $\frac{e}{a}$ a -Ecke, $\frac{e}{b}$ b -Ecke und $\frac{e}{c}$ c -Ecke als Begrenzungsflächen.

Es gibt nur zwei archimedische Polyeder der Gruppe b) mit dreiseitigen Ecken, siehe Erkl. 104 bis 106.

Ferner hat man:

$$\begin{aligned}\frac{l}{2} &= \overline{qm} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{x}{2} (1 + \sqrt{2}) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{x}{2} (2 + \sqrt{2})\end{aligned}$$

oder:

$$x = \frac{l}{2 + \sqrt{2}} \quad \dots \quad 45)$$

Teilt man nun in Rücksicht auf Gleichung 44 die halben Diagonalen des Quadrates $a_1 b_1 c_1 d_1$ in den Punkten m, n, o und p in dem Verhält-

nis $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, so gibt das dem Quadrat

$mno p$ eingeschriebene Achteck eine Begrenzungsfläche des Polyeders VII. Die übrigen achtseitigen Begrenzungsflächen fallen mit den Flächen des Hexaëders zusammen, während die Punkte m, n, o und p die ersten Projektionen der Mittelpunkte der sechsseitigen Begrenzungsflächen darstellen.

Ableitung aus dem Oktaëder. Die Mittelpunkte m, n, o und p der Projektionen der Oktaëderflächen bestimmen die Mittelpunkte der sechsseitigen Begrenzungsflächen. Bestimmt man somit diese Mittelpunkte, siehe Erkl. 105, und beschreibt dem Quadrate $mno p$ ein Achteck ein, so ist damit wieder eine achtseitige Begrenzungsfläche des Polyeders VII gegeben, woraus die übrigen Begrenzungen der ersten Projektion, wie die Figur 72 zeigt, unmittelbar folgen.

Bezeichnet l die Länge der Oktaëderkante, x jene der Kante des Polyeders VII, so ergibt sich aus der Figur unmittelbar, dass

$$x = \frac{1}{3} \cdot l' \quad \dots \quad 46)$$

ist.

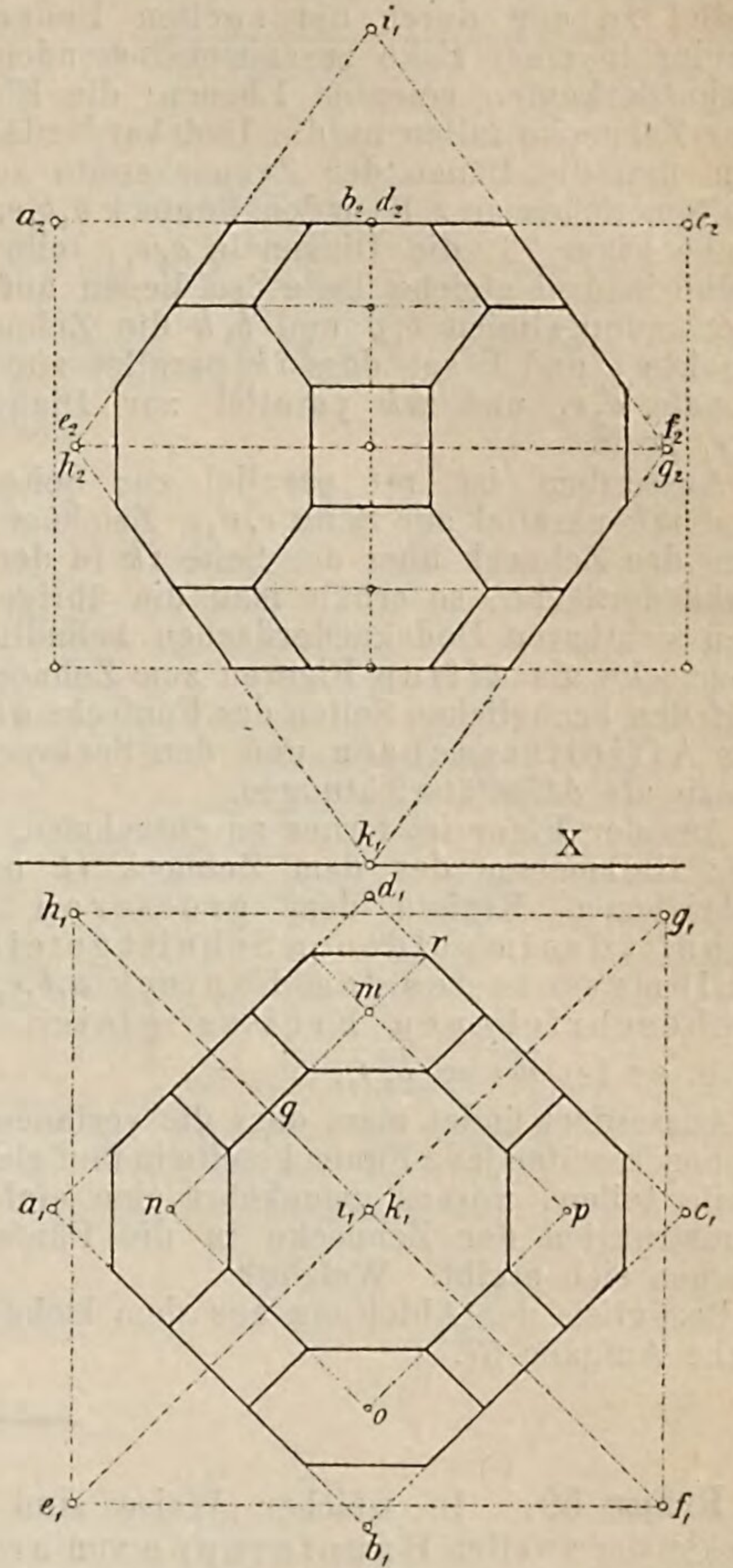
Mit Bezugnahme auf Gleichung 45 und 46 erhält man endlich zwischen den Kantenlängen l und l' derjenigen regulären Polyeder, aus welchen sich das Polyeder VII ableitet, die Verhältnissgleichheit:

$$\frac{l}{l'} = \frac{2 + \sqrt{2}}{3} \quad \dots \quad 47)$$

Erkl. 105. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Unter dem Mittelpunkte m eines Dreiecks versteht man den Schnittpunkt der drei Mitteltransversalen; jede dieser Mitteltransversalen wird in dem Punkte m in zwei Abschnitte geteilt, deren Längen sich wie 1:2 verhalten.“

Figur 72.



Erkl. 106. Das Polyeder VIII, von 30 Quadraten, 20 Sechsecken und 12 Zehneckern begrenzt, ist sowohl aus dem Dodekaeder wie aus dem Ikosaeder ableitbar.

Ableitung aus dem Dodekaeder. Die Ebenen der Begrenzungssechsecke laufen parallel zu den durch die zweiten Endpunkte dreier in einer Ecke zusammenstossenden Dodekaederkanten gelegten Ebenen; die Ebenen der Zehnecke fallen in die Dodekaederflächen. Um nun die Länge der Zehnecksseite zu erhalten, ziehe man z. B. in dem Fünfeck $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$, siehe Figur 73, die Diagonale $a_1 c_1$, teile dieselbe in drei gleiche Teile, so liegen auf den Verbindungslinien $b_1 g$ und $b_1 h$ die Zehneckspunkte i und k so, dass ik parallel zur Diagonale $a_1 c_1$ und mk parallel zur Diagonale $b_1 e_1$ läuft.

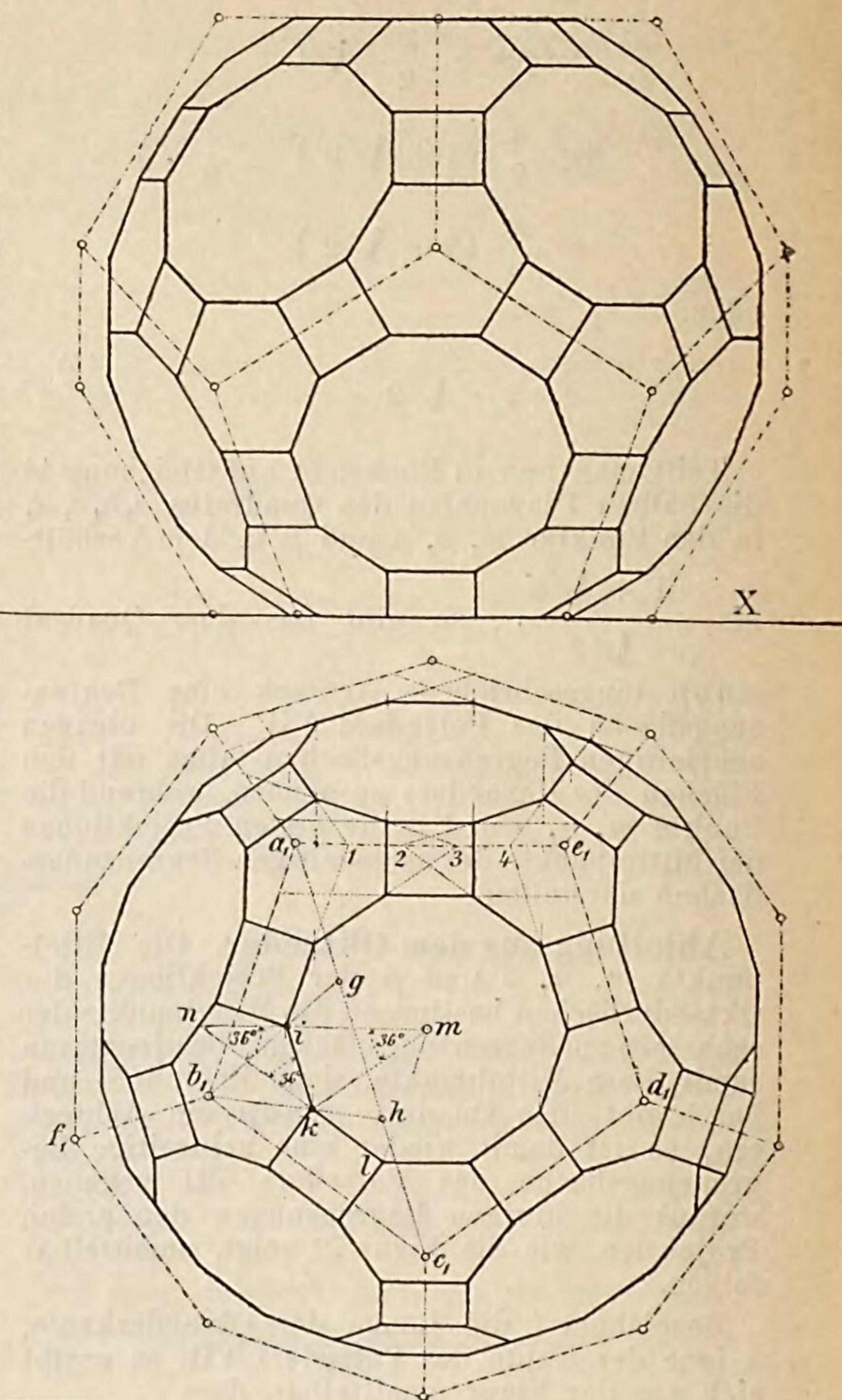
Ausserdem ist mi parallel zur Seite ae_1 und mk parallel zur Seite $c_1 d_1$. Zeichnet man nun das Zehneck über der Seite ik in der Dodekaederfläche, so erhält man die übrigen in den sichtbaren Dodekaederflächen befindlichen Zehnecke als affine Figuren zum Zehneck ik mit den bezüglichen Seiten des Fünfecks $abcde$ als Affinitätsachsen und den Senkrechten hiezu als Affinitätsrichtungen.

Aus der Figur ist ferner zu entnehmen, dass der Halbmesser des dem Zehneck ik umschriebenen Kreises dem grösseren Abschnitt des im goldenen Schnitt getheilten Halbmessers des dem Fünfeck $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ umschriebenen Kreises gleich ist, d. h. es ist $mi = b_1 f_1$.

Ausserdem findet man, dass die verlängerten Zehnecksseiten jede Fünfecksseite in fünf gleiche Teile teilen, woraus umgekehrt eine einfache Konstruktion der Zehnecke in die Fünfecksflächen sich ergibt. Welche?

Bezüglich der Ableitung aus dem Ikosaeder siehe Aufgabe 57.

Figur 73.



Frage 59. In welcher Weise sind die Ecken der zweiten Hauptgruppe von archimedischen Polyedern, nämlich jener mit vierseitigen Körperecken gebildet?

Antwort. Stossen in jeder Ecke vier Flächen aneinander, so sind dreierlei Eckenbildungen möglich, es können nämlich, in Rücksicht auf Antwort der Frage 54:

- a) drei a -Ecke und ein b -Eck;
- b) zwei a -Ecke und zwei b -Ecke;
- c) ein a -Eck, zwei b -Ecke und ein c -Eck an jeder Ecke zusammenstossen.

Frage 60. Von welchen Flächen sind die in der Antwort der Frage 59 unter a) bezeichneten Körperecken begrenzt?

Antwort. Für die in der Antwort der Frage 59 unter a) charakterisierte Körpergruppe nimmt die Gleichung 35 die Gestalt an:

Bezeichnet l' die Länge der Oktaëderkante, so erkennt man aus der Figur 74, dass

$$\frac{x}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{x}{3} = \frac{2}{3} \cdot l'$$

oder:

$$x = \frac{2l'}{2 + 3 \cdot \sqrt{2}} \quad . \quad . \quad 51)$$

ist.

Die Verbindung der Gleichungen 49 und 51 ergibt endlich die weitere Gleichung:

$$\frac{l}{l'} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{2 + 3 \cdot \sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad 52)$$

Frage 61. Von welchen Flächen sind die in der Antwort der Frage 59 unter b) bezeichneten Körperecken begrenzt?

Erkl. 109. Das Polyeder XI, begrenzt von 8 Dreiecken und 6 Quadraten, entsteht aus dem Hexaëder oder Oktaëder durch Verbindung der Kantenmittelpunkte in den Flächen der betreffenden Körper.

Erkl. 110. Das Polyeder XII, begrenzt von 20 Dreiecken und 12 Fünfecken, entsteht in gleicher Weise aus dem Ikosaëder bzw. Dodekaëder, wie das Polyeder XI aus dem Hexa- bzw. Oktaëder.

Antwort. Für die in der Antwort der Frage 59 unter b) charakterisierte Körpergruppe gilt die Gleichung:

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - 1 \right) \cdot e = 2 \quad . \quad . \quad 53)$$

Sie lässt folgende Auflösungen zu:

	XI	XII
a	3	3
b	4	5
e	12	30

Ein jedes Polyeder dieser Art besitzt $\frac{2e}{a}$ a -Ecke, $\frac{2e}{b}$ b -Ecke als Begrenzungsflächen.

Es gibt nur zwei archimedische Polyeder der Gruppe b) mit vierseitigen Ecken, siehe Erkl. 106 und 110.

Frage 62. Von welchen Flächen sind die Polyeder der in der Antwort der Frage 59 unter c) bezeichneten Körpergruppe begrenzt?

Erkl. 111. Das Polyeder XIII ist begrenzt von $\frac{e}{a}$ a -Ecken, $\frac{2e}{b}$ b -Ecken und $\frac{e}{c}$ c -Ecken, d. h. von 20 Dreiecken, 30 Quadraten und 12 Fünfecken und kann sowohl aus dem Dodekaëder wie auch dem Ikosaëder abgeleitet werden. Erstere Ableitung ist in Figur 75 ersichtlich gemacht. Es fallen die Fünfecksflächen mit den Dodekaëderflächen zusammen, während die Quadratebenen parallel gerichtet sind zu den Kanten des Dodekaëders und ausserdem senkrecht stehen zu den inneren Halbier-

Antwort. Für die genannte Körpergruppe gilt die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} - 1 \right) \cdot e = 2 \quad . \quad . \quad 54)$$

Sie lässt nur eine Auflösung zu, nämlich:

	XIII
a	3
b	4
c	5
e	60

ebenen zweier aufeinanderfolgender Dodekaëderflächen.

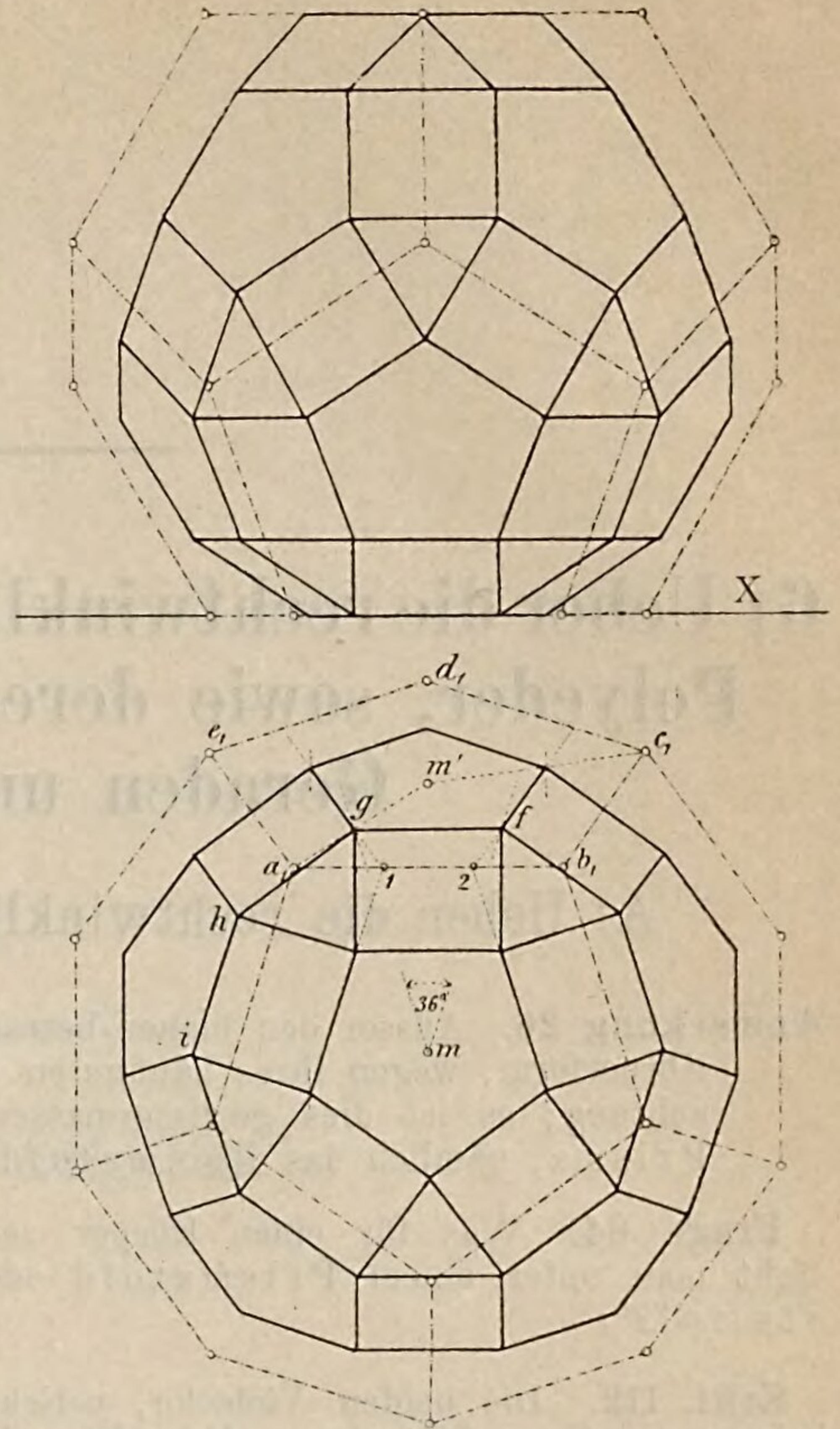
Ist in Figur 75 das Polyeder dargestellt, so erkennt man in der Figur $fghi \dots$ ein regelmässiges Zehneck, dessen Seitenlänge sich wie folgt konstruieren lässt:

Man fälle von m aus Senkrechte auf die beiden Kanten $c_1 d_1$ und $d_1 e_1$, welche die Verbindungslinien der Eckpunkte a_1 und b_1 mit dem Mittelpunkt m' in den Ecken f und g des fraglichen Zehnecks treffen. Man kann nunmehr das Zehneck $fghi \dots$ zeichnen und über seinen Seiten in der bezüglichen Dodekaëderfläche regelmässige Fünfecke errichten; desgleichen in den hiedurch nicht berührten Dodekaëderflächen, so sind hie-mit die Ecken des Polyeders bestimmt.

Je zwei nicht aufeinanderfolgende Fünfecksseiten treffen dabei die zur zwischenliegenden Fünfecksseite parallele Dodekaëderkante, siehe z. B. Kante $a_1 b_1$ der Figur 75, in Punkten 1. 2, in denen die Strecke $a_1 b_1$ in drei gleiche Teile geteilt ist, aus welcher Eigenschaft sich gleichfalls die den Dodekaëderflächen eingeschriebenen Fünfecke und damit die Ecken des Polyeders in einfacher Weise bestimmen lassen.

Bezüglich der Ableitung aus dem Ikosader siehe Aufgabe 57.

Figur 175.



Frage 63. In welcher Weise sind die Ecken der dritten Hauptgruppe von archimedischen Polyedern, nämlich jene mit fünfseitigen Körperecken gebildet?

Antwort. Stossen an jeder Ecke fünf Flächen aneinander, so ist dies mit Bezug auf Antwort der Frage 54 nur möglich, wenn an jeder Ecke vier a -Ecke und ein b -Eck sich vereinigen; für diesen Fall hat man aber die Bestimmungsgleichung:

$$\left(\frac{8}{a} + \frac{2}{b} - 3 \right) \cdot e = 4 \quad . \quad . \quad . \quad 55)$$

welche zwei Auflösungen zulässt, nämlich:

	XIV	XV
a	3	3
b	4	5
e	24	60

Ein Polyeder dieser Art besitzt $\frac{4e}{a}$ a -Ecke

und $\frac{e}{b}$ b -Ecke als Begrenzungsflächen. Die beiden hierhergehörigen Polyeder XIV und XV sind begrenzt von 32 Dreiecken und 6 Quadraten bzw. 80 Dreiecken und 12 Fünfecken. Die Polyeder dieser Gruppe lassen eine streng geometrische konstruktive Darstellung bzw. Ableitung aus einem der regulären platonischen Körper nicht zu.

6) Ueber die rechtwinklige Projektion allgemeiner Polyeder, sowie deren Schnitte mit Ebenen, Geraden und unter sich.

A) Ueber die rechtwinklige Projektion des Stumpfes.

Anmerkung 26. Ausser den bisher betrachteten Körpern verdient noch eine allgemeinere Körperform, wegen ihres häufigeren Auftretens an technischen Objekten, einige Beachtung; es ist dies gewissermassen eine Zwischenform zwischen Pyramide und Prisma, nämlich das Prismatoïd oder der Stumpf.

Frage 64. Was für einen Körper versteht man unter einem Prismatoïd oder Stumpf?

Erkl. 112. Die beiden Vielecke, n -Ecke, heissen die Grundflächen, die n -Vierecke die Seitenflächen des Stumpfes, letztere bilden überdies den Mantel des Stumpfes. Der Stumpf selbst heisst in diesem Falle n -seitig. Von den beiden Grundflächen kann man, ähnlich wie beim Prisma, die eine, etwa $abcdef$, siehe Figur 76, als die Deckfläche des Stumpfes bezeichnen.

Erkl. 113. Jede Grund- und Seitenfläche haben eine Grundkante, je zwei Seitenflächen eine Seitenkante gemein.

Ein n -seitiger Stumpf besitzt $2n$ Grund- und n Seitenkanten, so dass zur geometrischen Bestimmung des Stumpfes $3n$ Bestimmungsstücke, siehe Erkl. 25, erforderlich sein werden.

Erkl. 114. In besonderen Fällen können einzelne Seitenflächen eines Stumpfes auch aus Dreiecken gebildet sein; dann treffen aber zwei aufeinanderfolgende Seitenflächen entweder in einer Ecke der Grundfläche oder aber in einer Ecke der Deckfläche zusammen und es fallen in dieser Ecke zwei Ecken der betreffenden Fläche ineinander, so dass dieselbe um so viele Ecken weniger als n besitzt, als dreieckige Seitenflächen vorhanden sind.

Antwort. Ein Prismatoïd oder Stumpf ist ein im allgemeinen von zweien ebenen konvexen Vielecken, n Ecken, und n ebenen Vierecken begrenzter Körper, siehe Figur 76.

Ist die Anzahl der dreieckigen Flächen $= m$, so besitzt der Stumpf als Grundflächen ein n - und ein $(n - m)$ Eck, sowie $n - m$ viereckige und m dreieckige Seitenflächen. Die Zahl der Grundkanten ist daher gleich $n + n - m = 2n - m$, die der Seitenkanten $= n$, folglich die Gesamtzahl der Seitenkanten gleich $3n - m + n = 3n - m$, so dass zur geometrischen Bestimmung eines Stumpfes dieser Art $3n - m$ Bestimmungsstücke erforderlich sind.

Erkl. 115. Ist der Stumpf dreiseitig, so ist er gleichbedeutend mit einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide, d. h. man erhält den Pyramidenstumpf.

Erkl. 116. Ist von einem n -seitigen Stumpf die Grundfläche gegeben, so vertritt dieselbe $2n - 3$ Bestimmungsstücke; man bedarf somit zur vollständigen Festlegung der Gestalt des Körpers noch $3n - (2n - 3) = 3n - 2n + 3 = n + 3$ weiterer Bestimmungstücke. Von diesen können n zur Festlegung der n Seitenflächen (etwa die Neigungswinkel mit der Grundfläche) und 3 zur Bestimmung der Lage der zweiten Grund- bzw. Deckfläche dienen.

B) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 56. Von einem n -seitigen Stumpf sind gegeben eine Grundfläche $abcdef$, zwei zusammenstossende Seitenflächen $abab$ und $bcbc$, sowie die Längen zweier weiteren beliebigen Seitenkanten, etwa $\overline{ad}$ und $\overline{ff}$.

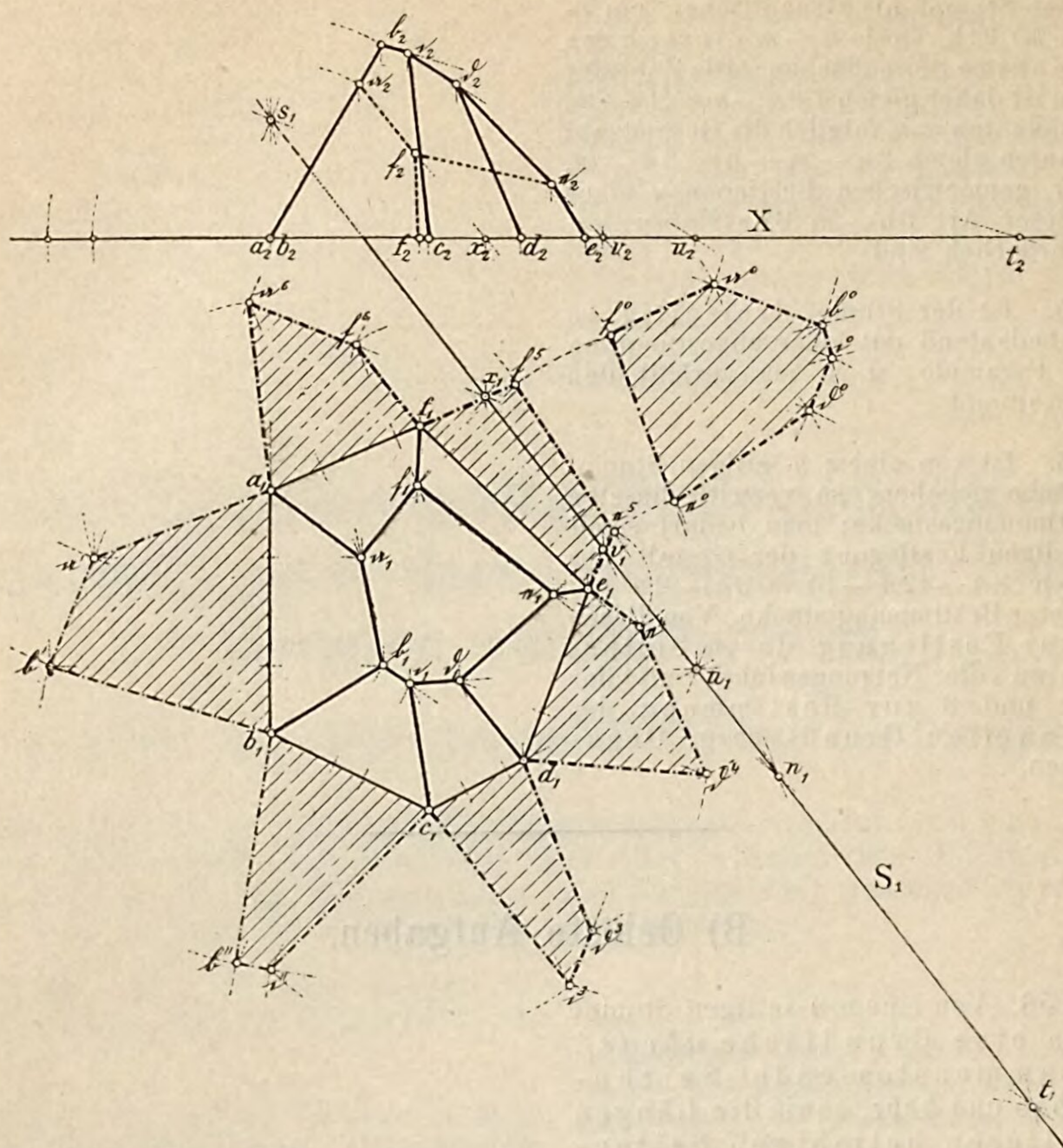
Man soll die rechtwinkligen Projektionen des Stumpfes auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 , sowie dessen Netz konstruieren.

Erkl. 117. Durch die gegebene Grundfläche sind $2n - 3$ Bestimmungsstücke, durch die eine Seitenfläche $abcd$ noch vier, weil eine Seite ab von vornherein gegeben ist, durch die Seitenfläche $bcbc$ noch drei, da zwei Seiten bc und bb vorgeschriebene Längen besitzen müssen, gegeben. Die Gesamtzahl der in Aufgabe 56 durch die drei Flächen gegebenen Bestimmungsstücke ist demnach gleich $2n - 3 + 4 + 3 = 2n + 4$, so dass zur vollständigen Bestimmung des Stumpfes noch $n - 4$, d. i. im vorliegenden Falle noch zwei Bestimmungsstücke, das sind eben die gegebenen Längen $\overline{ad}$ und $\overline{ff}$, nötig sind.

Auflösung und Konstruktion. Man lege, siehe Figur 75, die gegebene Grundfläche mit der Grundkante a_1b_1 senkrecht zur X -Achse in die **Pr. Eb.** E_1 und an die Kanten a_1b_1 und b_1c_1 die gegebenen Seitenflächen an, so bestimmen die Schnittpunkte s_1 und t_1 der Geraden b_1a_1 und $b'_1a'_1$, ebenso b_1c_1 und $b''_1c''_1$ die Spur S_1 der Deckfläche. Mittels der Punkte s_1 und t_1 , sowie b'_1 , a'_1 und b''_1 , c''_1 bestimmen sich zunächst die Punkte a_1 , b_1 und c_1 , sowie deren zweite Projektionen a_2 , b_2 , c_2 .

Man kennt hiemit von der Deckfläche drei Punkte, wodurch deren Lage gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 vollständig gegeben ist. Zur Ermittlung der noch fehlenden Punkte denke man sich die Seitenfläche $cd\delta c$ in die **Pr. Eb.** E_1 umgelegt, so erhält man von der Umlegung unmittelbar die Lage von c_1c^3 ($c_1c'' = c_1c^3$) und ausserdem die Lage von $c^3\delta^3$ (die verlängerte $c^3\delta^3$ geht durch den Schnittpunkt u_1 von c_1d_1 mit S_1). Der Punkt δ^3 liegt somit auf einem Kreisbogen mit d_1 als Mittelpunkt und der gegebenen Länge $\overline{d\delta}$ als Halbmesser.

Figur 76.



In gleicher Weise bestimmt sich auch die Umlegung der Seitenfläche $affa$ ($\overline{a^6a^6} = \overline{a_1a'}$), $\bar{f}^6$ liegt auf a^6x_1 , sowie auf einem Kreisbogen mit f_1 als Mittelpunkt und der gegebenen Länge $\bar{f}\bar{f}$ als Halbmesser. Aus den Umlegungen d_3 und $\bar{f}^6$ ergeben sich die ersten Projektionen d_1 und f_1 mittels der Punkte u_1 und x_1 . Nachdem nunmehr die erste Projektion des Stumpfes vollständig gezeichnet ist, können auch die Umlegungen der noch fehlenden Seitenflächen leicht ermittelt werden. ($\overline{d_1d^4} = \overline{d_1d^3}$, $\overline{f_1f^5} = \overline{f_1f^6}$ d^4e^4 und $\bar{f}^5e^5$ gehen bezw. durch die Punkte v_1 und w_1 , die Senkrechten durch e_1 zu d_1e_1 und f_1e_1 liefern die Punkte e^4 und e^5 . Probe: Es muss $\overline{e_1e^4} = \overline{e_1e^5}$ sein.)

In der Figur 76 ist ausserdem noch die Umlegung der Deckfläche um ihre Spur S_1 vorgenommen worden.

Es ist $\overline{t_1b^0} = \overline{t_1b''}$, $\overline{s_1b^0} = \overline{s_1b'}$ gemacht, hiedurch sind Punkt b^0 sowie die Linien b^0s_1 und b^0t_1 gegeben, auf welchen die Punkte a^0 und c^0 so

liegen, dass $\overline{s_1 a^0} = \overline{s_1 a'}$ und $\overline{t_1 c^0} = \overline{t_1 c''}$ ist; nunmehr gehen die Linien $a^0 \bar{f}^0$ und $c^0 \bar{d}^0$ durch x_1 und u_1 beziehungsweise und es ist $\overline{x_1 \bar{f}^0} = \overline{x_1 \bar{f}^6}$ und $\overline{u_1 \bar{d}^0} = \overline{u_1 \bar{d}^6}$; in gleicher Weise bestimmt sich e^0 , weil $\bar{f}^0 e^0$ durch w_1 geht und $\overline{w_1 e^0} = \overline{w_1 e^6}$ sein muss. Als Probe für die Genauigkeit der Zeichnung müssen die Punkte a^0 bis $\bar{f}^0$ in Senkrechten zu S_1 durch die entsprechenden Punkte a_1 bis $\bar{f}_1$ liegen.

C) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 57. Man leite die archimedischen Polyeder Nro. VIII und XIII aus dem Ikosaëder ab und zeichne deren Projektionsformen.

Aufgabe 58. Man zeichne die rechtwinkligen Projektionsformen der archimedischen Polyeder mit Ausnahme der unbestimmt gelassenen Polyeder: I und IX, sowie der Körper XIV und XV direkt aus ihrem Netz, d. h. ohne Zuhilfenahme der regulären Polyeder.

Aufgabe 59. Von einem n -seitigen Stumpf kennt man eine Grundfläche, zwei zusammenstossende Seitenflächen, sowie

- a) die Neigungswinkel der übrigen $n - 4$ noch vollständig unbestimmten Seitenflächen mit der Grund- oder der Deckfläche;
- b) die Neigungswinkel von $n - 4$ nicht gegebenen Seitenkanten mit der Grund- oder der Deckfläche;
- c) $n - 4$ Winkel auf einanderfolgender nicht gegebener Seitenflächen;
- d) die Neigungswinkel von $\frac{n - 4}{2}$ nicht gegebenen Seitenkanten mit den beiden Grundflächen.

Man soll die Projektionen des Stumpfes auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 , sowie dessen Netz zeichnen.

Aufgabe 60. Von einem n -seitigen Stumpf sind gegeben: der Neigungswinkel beider Grundflächen, die Neigungswinkel sämtlicher Seitenkanten mit der Grundfläche ausserdem die Längen von $n - 1$ Seitenkanten.

Man soll die Projektionen des Stumpfes auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 , sowie dessen Netz zeichnen.

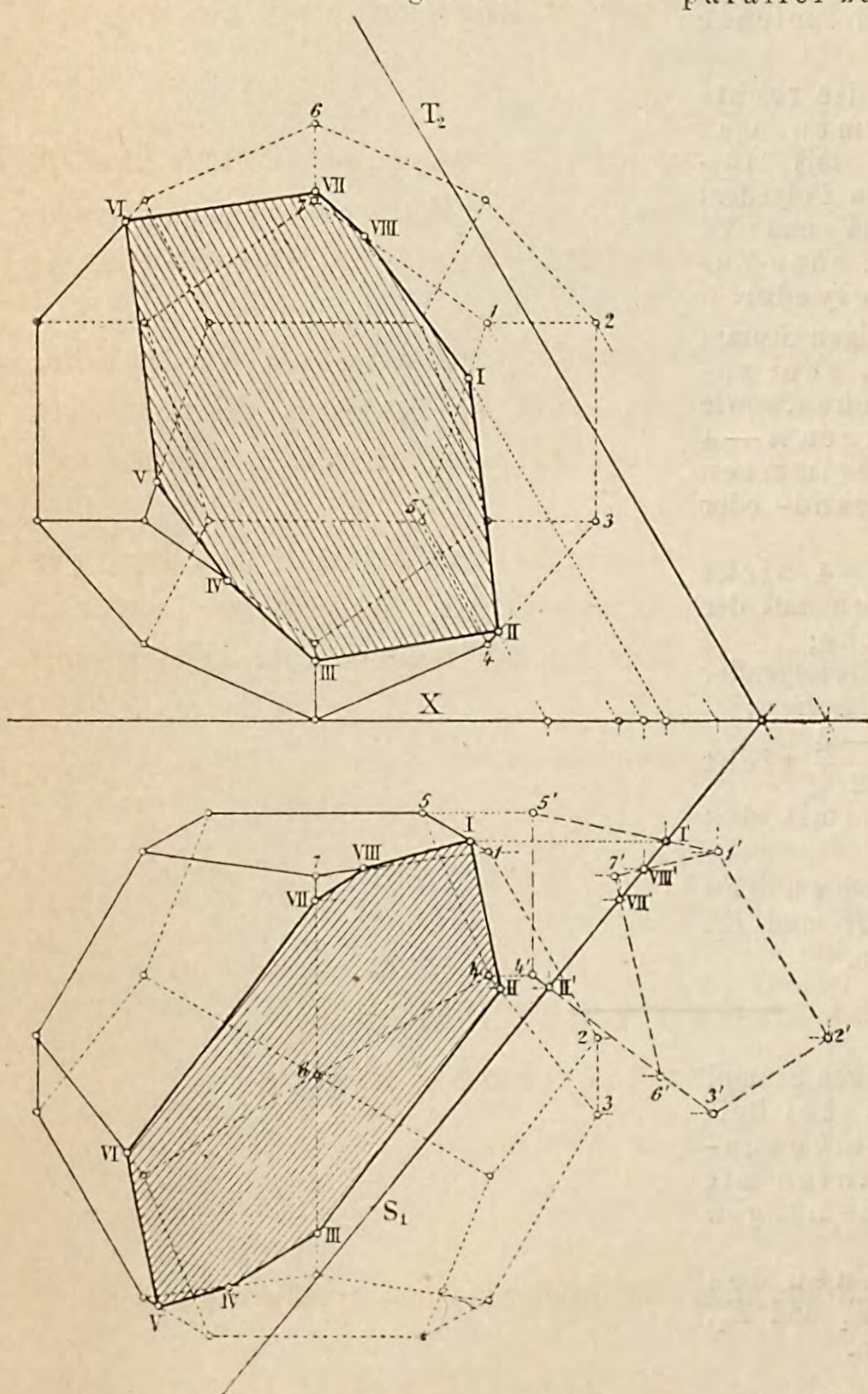
D) Schnitt von Ebenen und Geraden mit beliebigen Polyedern sowie zweier Polyeder unter sich.

Anmerkung 27. Bezüglich des allgemeinen Verfahrens zur Ermittlung des Schnittes einer Ebene oder einer Geraden mit der Oberfläche eines beliebigen Körpers. siehe Anmerkungen 8, 11 und 17.

Frage 65. Welches ist das zweckmässigste Verfahren zur Aufsuchung des Schnittes einer unbegrenzten oder begrenzten Ebene mit der Oberfläche eines beliebigen Körpers?

Antwort. Am zweckmässigsten verfährt man bei der Konstruktion des Schnittes einer Ebene mit der Oberfläche eines beliebigen Körpers stets durch Annahme von Ebenen parallel zu einer Geraden der schneidenden Ebene, welche durch die einzelnen Körperkanten gelegt, die gegebene Ebene nach parallelen Geraden schneiden, deren Schnittpunkte mit den entsprechenden Körperkanten Punkte der Schnittfigur liefern.

Figur 77.



Erkl. 118. Das in der Antw. der Frage 65 angegebene Verfahren der Konstruktion der Schnittfigur einer Ebene mit der Oberfläche eines beliebigen Polyeders besteht im Grunde lediglich in der Herstellung einer Parallelprojektion von Körper und Ebene in der **Pr. Eb. E_1** , und zwar parallel zu einer Geraden der Ebene, wobei die Parallelprojektion der Ebene als gerade Linie, somit auch die Parallelprojektion der gesuchten Schnittfigur gleichfalls als gerade Linie erscheint.

Ist dabei, wie z. B. in Figur 76, die Ebene durch ihre Spuren S und T gegeben, so wählt man die Hilfsebenen parallel zu einer, etwa zur zweiten Spur T der Ebene, zieht durch sämtliche Ecken des Polyeders Parallele zu T und bestimmt deren Schnittlinien mit einer ganz beliebigen weiteren Ebene, etwa gleich mit der **Pr. Eb. E_1** . Die Spuren der die Körperkanten enthaltenden Hilfsebenen schneiden die Spur der gegebenen Ebene in Punkten, durch welche die Schnittgeraden der Hilfsebenen mit der gegebenen Ebene parallel zu T hindurchgehen und auf den bezüglichen Körperkanten Punkte der Schnittfigur zwischen der gegebenen Ebene und dem Polyeder liefern.

In der Figur 77 ist das Konstruktionsverfahren hinlänglich gekennzeichnet. Die Hilfsebenen durch die Körperkanten $1,5$; $1,7$; $6,7$; $3,4$ liefern als Spuren die Geraden $1',5'$; $1',7'$; $6',7'$ und $3',4'$, welche ihrerseits die Spur S_1 in den Punkten I' , $VIII'$, VII' , II' schneiden denen auf den entsprechenden Körperkanten der Punkte I , $VIII$, VII , II ... entsprechen, siehe auch Erkl. 235, sowie Aufgabe 87, I. Teil.

In der nämlichen Weise wird man auch verfahren für den Fall eine begrenzte Ebene, d. h. ein ebenes Vieleck zum Schnitt mit der Oberfläche eines Körpers zu bringen wäre, es würde eben dann, wie bei den früheren Beispielen, siehe Frage und Antwort 24 und 25, nur der innerhalb der Begrenzung des Vielecks gelegene Teil der Schnittfigur als eigentlicher Durchschnitt zu gelten haben.

Frage 66. Welches ist das zweckmäßigste Verfahren zur Aufsuchung des Schnittes einer Geraden mit der Oberfläche eines beliebigen Körpers?

Antwort. Mit Bezugnahme auf das in Anmerkung 11 Gesagte wird man bei einem ganz allgemeinen Körper als Hilfsebene stets eine die Gerade enthaltende projizierende Ebene wählen, d. h. man wird entweder die erste oder zweite Projektion der Geraden als erste bzw. zweite Projektion der Schnittfigur der betreffenden projizierenden Ebene mit dem Körper betrachten, die zugehörige andere Projektion durch Projizieren auf die entsprechenden Körperkanten aufsuchen und im Schnitt der Schnittfigur mit der Projektion der Geraden die Projektionen der Schnittpunkte von Gerade und Körperoberfläche erhalten.

Man wähle in Figur 77 die Projektionen einer Geraden willkürlich und bestimme wie eben gesagt, den Schnitt der Geraden mit dem durch seine Projektionen dargestellten Zwölfflächner.

Frage 67. Wie konstruiert man am zweckmässigsten den Schnitt zweier Polyeder überhaupt?

Antwort. Es sind drei Fälle denkbar, entweder ist nämlich

- a) einer der Körper ein Prisma,
- b) einer der Körper eine Pyramide oder man hat
- c) zwei ganz allgemeine Körper zum Schnitt zu bringen.

In den **Fällen a)** und **b)** wird man stets durch die Kanten des allgemeinen Körpers Ebenen legen parallel zu den Kanten des Prismas bzw. gehend durch die Pyramidenspitze und deren Schnittlinien mit der Ebene der Grundfläche von Prisma bzw. Pyramide aufsuchen; durch die so sich ergebenden Schnittpunkte auf den Grundkanten von Prisma bzw. Pyramide gehen dann parallel zur Prismenrichtung bzw. durch die Pyramidenspitze die Schnittlinien der Hilfsebenen mit den Prismen bzw. Pyramidenflächen hindurch und liefern auf den bezüglichen Kanten des zweiten Körpers Schnittpunkte beider Körper.

Im **Fall c)** lässt sich kein spezielles Konstruktionsverfahren aufstellen; man wird eben in diesem Falle nacheinander die Schnittpunkte der Kanten des einen Körpers mit den Flächen des anderen und umgekehrt aufsuchen. Die Verbindung der einzelnen Schnittpunkte zur Schnittfigur erfolgt nach dem in Erkl. 56 angegebenen Verfahren.

E) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 61. Man konstruiere den Durchschnitt eines durch seine Projektionen gegebenen Quadrats mit einem regulären Hexaëder (Würfel).

Aufgabe 62. Man konstruiere den Durchschnitt einer Geraden mit einem regelmässigen Ikosaëder.

Aufgabe 62a. Man konstruiere den Schnitt eines vierseitigen regulären Prismas, dessen Achse durch den Mittelpunkt eines regulären Oktaëders geht, mit letzterem Körper; die Grundflächen des Prismas sollen sich am Schnitte beteiligen.

Aufgabe 62b. Man konstruiere den Schnitt einer sechsseitigen regulären Pyramide, deren Achse durch den Mittelpunkt

eines regulären Dodekaëders geht, mit letzterem Körper. Die Grundfläche der Pyramide beteilige sich am Schnitt.

Aufgabe 63. Man konstruiere die Schnitte zwischen folgenden regulären Körpern:

- a) einem Tetraëder und einem Hexaëder oder Oktaëder;
- b) einem Hexaëder und einem Oktaëder oder Dodekaëder oder Ikosaëder;
- c) einem Dodekaëder und einem Ikosaëder,

wenn die Mittelpunkte der in Betracht kommenden Körper zusammenfallen, die Dimensionen der Körper und ihre gegenseitigen Stellungen aber beliebig gewählt werden können.

Man untersuche insbesondere jene Lagen der schneidenden Körper, bei welchen als gemeinsames Körperstück ein archimdischer Körper entsteht.

Aufgabe 64. Die Ecken eines Hexaëders (Würfels) können zugleich als Ecken zweier sich durchschneidenden regelmässigen Vierflächner (Tetraëder), deren Kanten mit den Diagonalen der Würfelquadrate zusammenfallen, aufgefasst werden. Man soll den Durchschnitt der beiden Vielflächer konstruieren.

Aufgabe 65. Zieht man von einer Ecke eines regelmässigen Dodekaëders in den dreien an jeder Ecke zusammenstossenden Fünfecken die möglichen Diagonalen, so bilden je zwei nichtaufeinanderfolgende Diagonalen die Seitenkanten eines Würfels, von welchen im ganzen fünf vorhanden sind. Man konstruiere die Durchschnitte dieser fünf Würfel.

7) Ueber die Konstruktion der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Punkten, Linien, ebenen Flächen und ebenflächigen Körpern.

Anmerkung 28. Die im Vorangegangenen behandelten Probleme über die Durchschnitte von Geraden und Ebenen mit Körpern sowie von Körpern unter sich finden ihre praktische und zweckentsprechende Anwendung überall da, wo es sich um die Konstruktion von Schatten, sowohl Selbst- wie Schlagschatten obiger Raumgrössen handelt.

Bei allen Schattenkonstruktionen in technischen Zeichnungen ist stets eine Beleuchtung durch parallele geradlinige Lichtstrahlen, ausgehend von einer

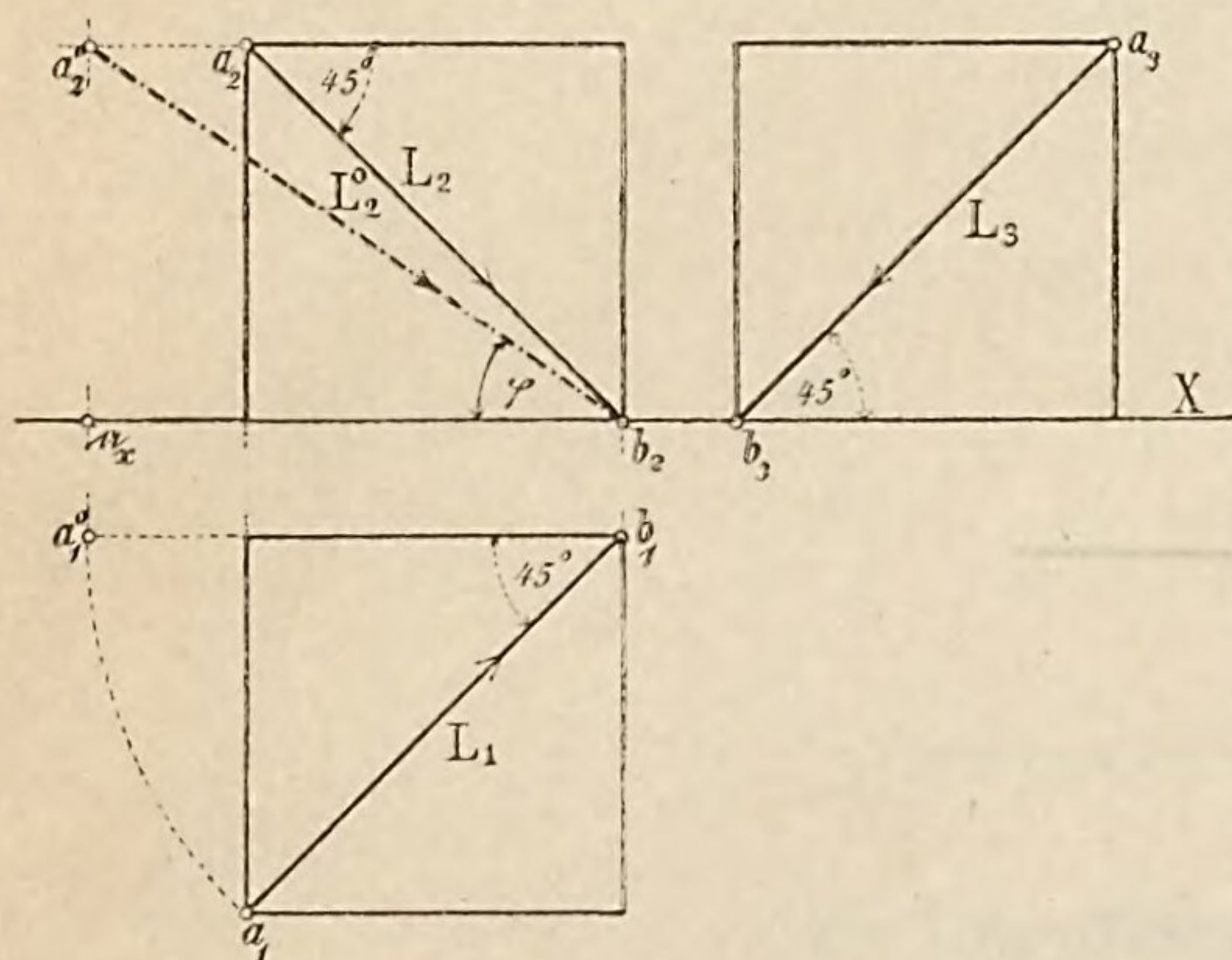
im Unendlichen befindlichen punktförmigen Lichtquelle, vorausgesetzt, wobei Reflexwirkungen und subjektive Beleuchtungserscheinungen hervorgerufen durch die Stellung des Beobachters gegen das beleuchtete Objekt ausser Acht bleiben, was in soferne seine Berechtigung hat, als ja bei Darstellungen in orthogonaler Parallelprojektion der Standpunkt des Beobachters in unendlicher Ferne in senkrechter Richtung zur betreffenden **Pr. Eb.** vorausgesetzt ist, und daher eine Wiedergabe von subjektiven Beleuchtungserscheinungen vollständig zwecklos ist.

Bei den folgenden Konstruktionen handelt es sich vielmehr lediglich um die Ermittlung der Selbst- bzw. Schlagschattengrenzen von den in der Ueberschrift bezeichneten Raumgrössen unter der Voraussetzung einer Beleuchtung durch parallele geradlinige Lichtstrahlen.

A) Ueber die Richtung der Lichtstrahlen.

Frage 68. Welches ist die bei technischen Zeichnungen übliche Richtung der Lichtstrahlen?

Figur 78.



Antwort. Die Richtung der Lichtstrahlen kann selbstverständlich eine ganz beliebige sein; üblich ist es, aus Zweckmässigkeits-Gründen und zwar vornehmlich zur Vereinfachung der konstruktiven Ermittlung der Schattengrenzen, die Lichtstrahlen parallel zur Diagonale eines Würfels zu nehmen, der mit seinen Seitenflächen beziehungsweise parallel zu den **Pr. Ebn.** E_1 , E_2 und E_3 gerichtet ist und zwar parallel zu jener Diagonale, welche die vordere, linke obere Ecke mit der rückwärtigen, rechten unteren Ecke verbindet.

Unter der gemachten Voraussetzung bilden, siehe Figur 78, die Projektionen L_1 , L_2 und L_3 der Lichtrichtung mit der Projektionsachse je einen Winkel von 45° .

Desgleichen ist auch die Lichtrichtung selbst gegen die **Pr. Ebn.** E_1 , E_2 und E_3 unter dem gleichen Winkel φ geneigt, dessen Grösse etwa $35^\circ 16'$ beträgt und in Figur 78 durch Drehung der projizierenden Ebene L_1 parallel zur **Pr. Eb.** E_2 ermittelt wurde.

Erkl. 119*. Bezeichnet man die Länge der Würfelseite mit 1, so ist die Länge der Strecke $a_x b_2 = \sqrt{2}$, daher:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

oder da $\sqrt{2} = 1,4142$ ist,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{1,4142} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \text{ annähernd } \dots 56)$$

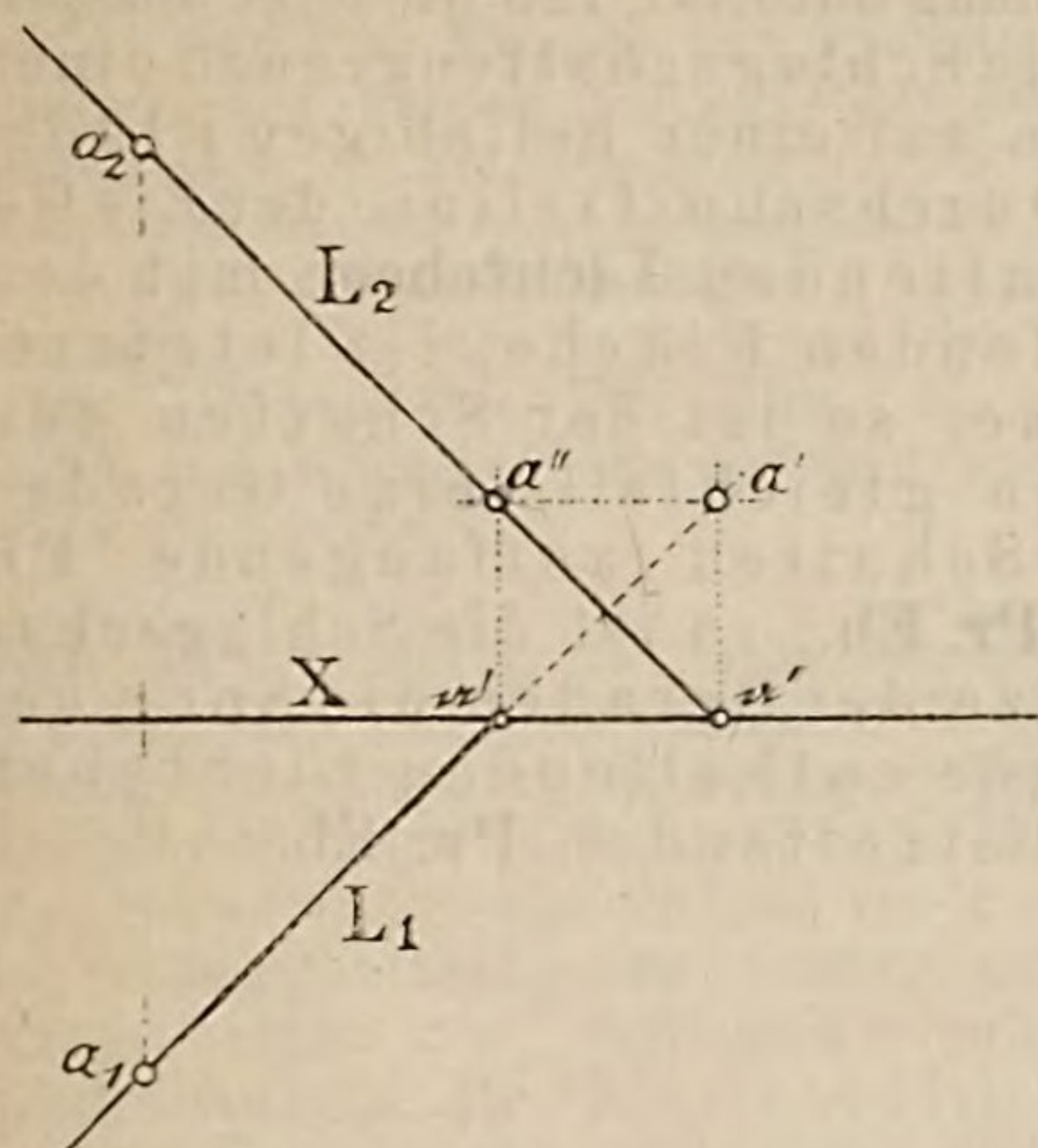
Mit Bezugnahme auf Gleichung 56 gewinnt man eine sehr einfache Konstruktion des Winkels φ : „Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 10 und 14 bzw. 5 und 7, so liegt in demselben der kleineren Kathete der Winkel φ gegenüber.“

B) Ueber die Konstruktion der Schlagschatten von Punkten, Linien und ebenen, von Linien begrenzten Figuren.

a) Schlagschatten eines Punktes.

Frage 69. Was versteht man unter dem Schlagschatten eines Punktes?

Figur 79.



Erkl. 120. Verbindet man die Schnittpunkte a' und a'' von L_1 und L_2 mit der X -Achse, siehe Figur 79, mit den Punkten a'' und a' , so entsteht das Quadrat $a'a''a'a'$, woraus das Parallelsein der Linie $a'a''$ mit der X -Achse folgt. Als Satz lässt sich das eben Gesagte wie folgt ausdrücken:

„Die Verbindungslinie der Schlagschattenpunkte in den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 eines Punktes im Raume liegen stets in einer Parallelen zur X -Achse.“

Erkl. 121. Alle Sätze, welche in der Folge für das Projektionssystem I—II aufgestellt werden, haben in gleicher Weise auch für die Projektionssysteme I—III oder II—III Gültigkeit.

Erkl. 122. Hat man von einem Punkte etwa a seinen Schlagschatten auf eine der **Pr. Ebn.** z. B. E_1 als erste Spur des Lichtstrahles durch a konstruiert, so findet man mit Bezugnahme auf den in Erkl. 120 enthaltenen Satz den Schlagschatten auf die andere **Pr. Eb.** stets durch Ziehen einer Parallelen durch den schon vorhandenen Schlagschattenpunkt zur X -Achse bis zum Schnitt mit der gleichnamigen Projektion des Lichtstrahles.

Antwort. Unter dem Schlagschatten eines Punktes auf eine beliebige Fläche versteht man stets den Durchschnittspunkt des durch den Punkt gezogenen Lichtstrahles mit der betreffenden Fläche. Der Schlagschatten eines Punktes auf eine der **Pr. Ebn.** ist also stets die Spur des den in Rede stehenden Punkt enthaltenden Lichtstrahles in der betreffenden **Pr. Eb.** Der Schlagschatten auf die **Pr. Eb.** E_1 ist die erste, jener auf die **Pr. Eb.** E_2 die zweite Spur des den Punkt enthaltenden Lichtstrahles. Dabei ist selbstverständlich vorausgesetzt, dass der den Schatten erzeugende, d. h. der Schatten werfende Punkt sich zwischen der Lichtquelle und der Schatten empfangenden oder Schatten auffangenden Fläche, also eine der **Pr. Ebn.**, befinde.

Ist z. B. a, siehe Figur 79, der Schatten werfende Punkt, so wird dessen Schatten auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 erhalten werden in den Spuren a' und a'' des den Punkt a enthaltenden Lichtstrahles. „Die Aufgabe der Schlagschattenbestimmung eines Punktes auf irgend eine Fläche ist also stets eine Durchschnittsaufgabe.“

b) Schlagschatten einer Geraden.

Frage 70. Was versteht man unter dem Schlagschatten einer Geraden?

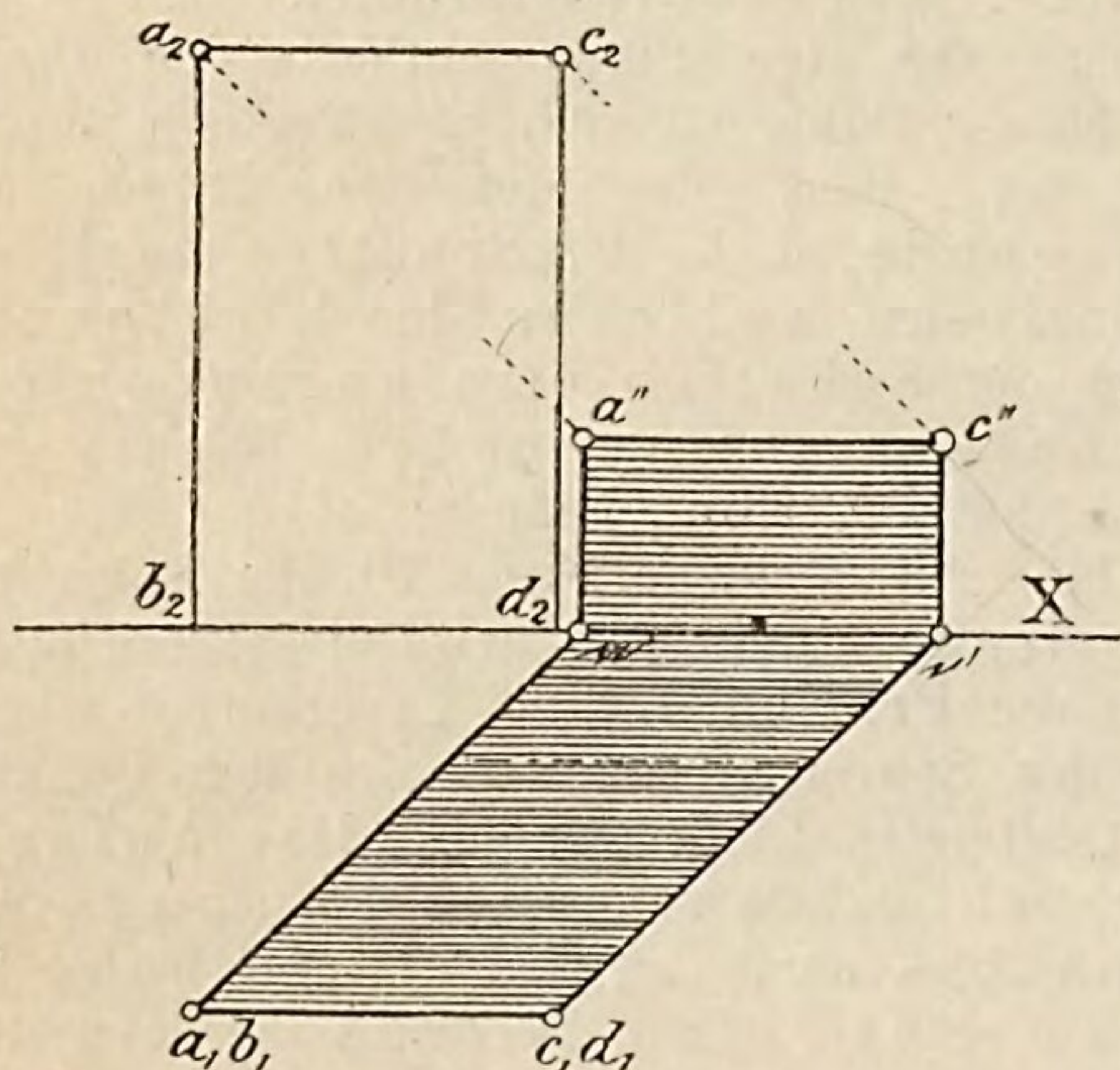
Antwort. Zieht man durch sämtliche Punkte einer Geraden im Raume Lichtstrahlen,

Erkl. 123. Eine zur Lichtrichtung parallele Ebene soll für die Folge stets eine „Lichtebene“ heißen.

Erkl. 124. Aus der in Antwort der Frage 70 gegebenen Definition des Schlagschattens einer Geraden auf eine **Pr. Eb.** folgt zugleich, dass eine zu einer **Pr. Eb.** parallele Gerade einen zur Geraden selbst parallelen Schatten, eine zu einer **Pr. Eb.** senkrechte Gerade einen zur bezüglichen Projektion der Lichtrichtung parallelen Schatten erzeugt.

So ist z. B., siehe Figur 80, der Schlagschatten der Geraden ab und cd auf die **Pr. Eb.** E_1 parallel zur ersten Projektion L_1 der Lichtrichtung, jener auf die zweite **Pr. Eb.** dagegen parallel zu den Geraden selbst. In gleicher Weise ist der Schlagschatten $a''c''$ auf die **Pr. Eb.** E_2 parallel zur Geraden ac .

Figur 80.



Erkl. 125. Bestimmt man den Schlagschatten $a'b'$, siehe Figur 81, auf die **Pr. Eb.** E_1 , letztere vorerst als unbegrenzt vorausgesetzt, als erste Spur der Lichtebene ab , so ergibt sich der Schlagschatten $a''b''$ derselben Geraden auf die **Pr. Eb.** E_2 in Rücksicht auf Erkl. 120 durch Ziehen von Parallelen durch a' und b' zur X -Achse bis zum Schnitt mit den Projektionen der Lichtstrahlen durch a_2 und b_2 und Verbindung der Punkte a'' und b'' mit einander.

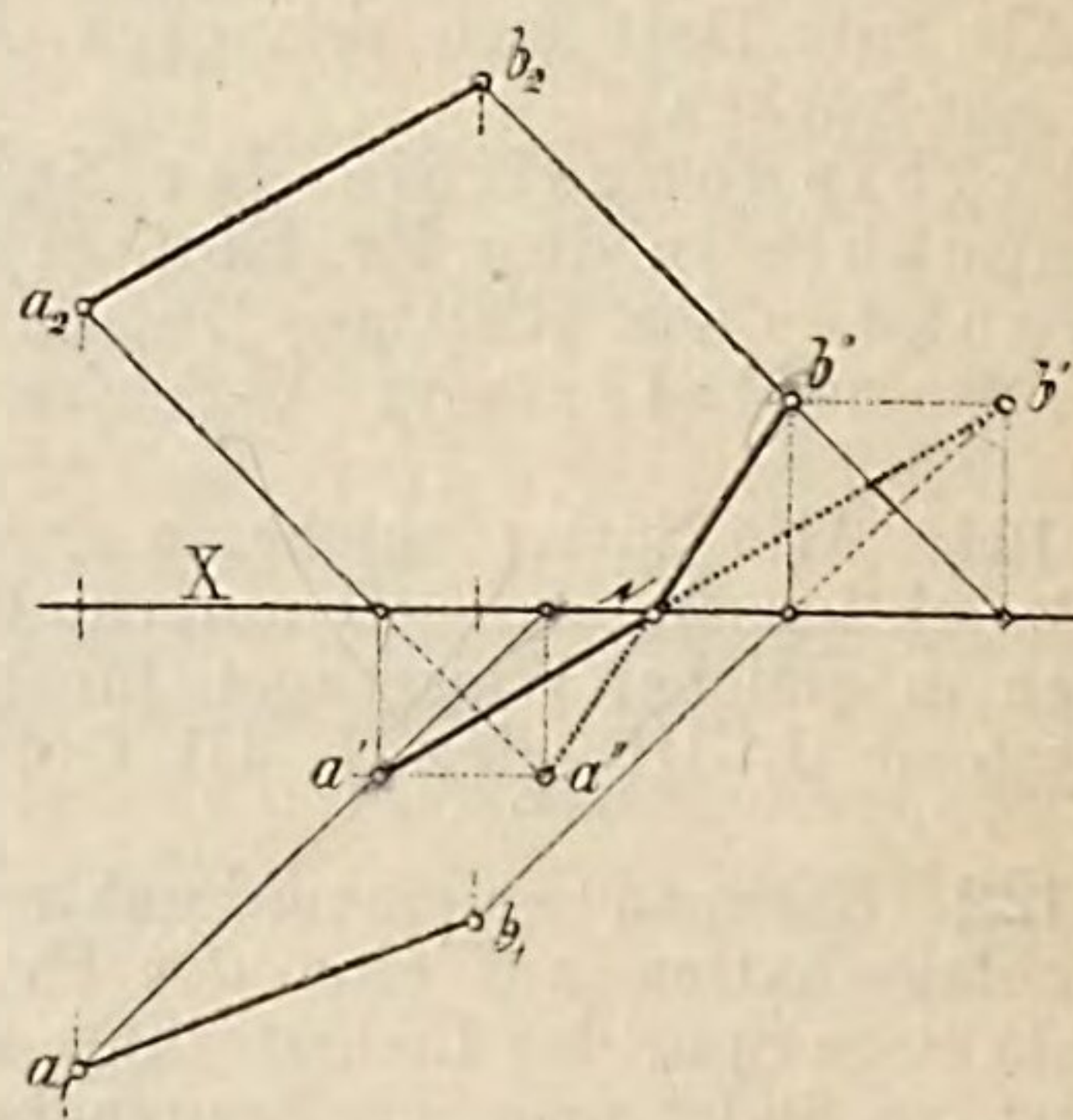
Beide Gerade $a'b'$ und $a''b''$ treffen sich in einem Punkte c der X -Achse.

Nimmt man nunmehr die **Pr. Ebn.** durch die X -Achse begrenzt an, so sind als eigentliche Schlagschatten der Geraden ab auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 nur die in den positiven Hälften derselben befindlichen Stücke $a'c$ und $a''c$ zu rechnen.

so bilden letztere eine Ebene parallel zur Lichtrichtung, siehe Erkl. 123, deren Schnittlinie mit der Schatten auffangenden Fläche, die Begrenzung des Schlagschattens auf der betreffenden Fläche bestimmt. Ist die Schatten auffangende Fläche eine Ebene etwa eine der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 , so ist die Schlagschattengrenze der Geraden wieder eine Gerade. Das eben Gesagte lässt sich mit Beziehung auf Erkl. 123 wie folgt aussprechen:

„Die Schlagschattengrenze einer Geraden auf einer beliebigen Fläche ist die Durchschnittslinie der die Gerade enthaltenden **Lichtebene** mit der betreffenden Fläche; ist letztere eine Ebene, so ist der Schatten der Geraden gleichfalls eine Gerade. Ist die Schatten auffangende Fläche eine **Pr. Eb.**, so ist die Schlagschattengrenze der Geraden die Spur der die Gerade enthaltenden Lichtebene in der betreffenden **Pr. Eb.**“

Figur 81.



c) Schlagschatten einer ebenen Figur.

Frage 71. Was versteht man unter dem Schlagschatten eines ebenen Vielecks?

Antwort. Ist eine von Geraden begrenzte ebene Figur, wie z. B. das Dreieck abc ,

Erkl. 126. Das Prisma, welches die Schatten werfende Figur als Leitlinie (Grundfläche) und die Lichtrichtung als Richtung besitzt, soll für die Folge das „Lichtprisma“ der betreffenden Figur heissen.

Erkl. 127. Für das in Figur 82 dargestellte Dreieck abc erhält man, die **Pr. Ebn.** zunächst als unbegrenzt vorausgesetzt, als Schlagschattengrenze in der **Pr. Eb.** E_1 das Dreieck $a'b'c'$ aus welchem sich in Rücksicht auf Erkl. 120 und 125 das Dreieck $a''b''c''$ als Schlagschattengrenze in der **Pr. Eb.** E_2 unmittelbar ergibt. Die Seiten der beiden Schlagschattendreiecke schneiden sich in den Punkten a, c, b (letzterer Punkt, Schnittpunkt der verlängerten Linien $a'c'$ und $a''c''$ ist in der Figur nicht mehr gezeichnet) und es sind als eigentliche Schlagschatten nur die in den positiven Hälften der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 liegenden schraffierten Teile der Schlagschattendreiecke zu rechnen.

Erkl. 128. Beide Schlagschattendreiecke stehen, wie dies aus der Konstruktion derselben unmittelbar hervorgeht, in affiner Beziehung zu einander mit der X -Achse als Affinitätsachse und -Richtung. Allein nicht nur die beiden Schlagschattenfiguren, sondern auch jede Projektion steht zur Schlagschattenfigur in der gleichnamigen **Pr. Eb.** in Affinitätsbeziehung, wobei die betreffende Projektion der Lichtrichtung als Affinitätsrichtung erscheint, während die Affinitätsachse mit der Spur der Ebene der Figur zusammenfällt.

Als Satz ausgedrückt lautet das eben Gesagte wie folgt:

„Die Schlagschattengrenzen einer ebenen Figur auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 sind affine Figuren mit der X -Achse als Affinitätsachse und -Richtung.“

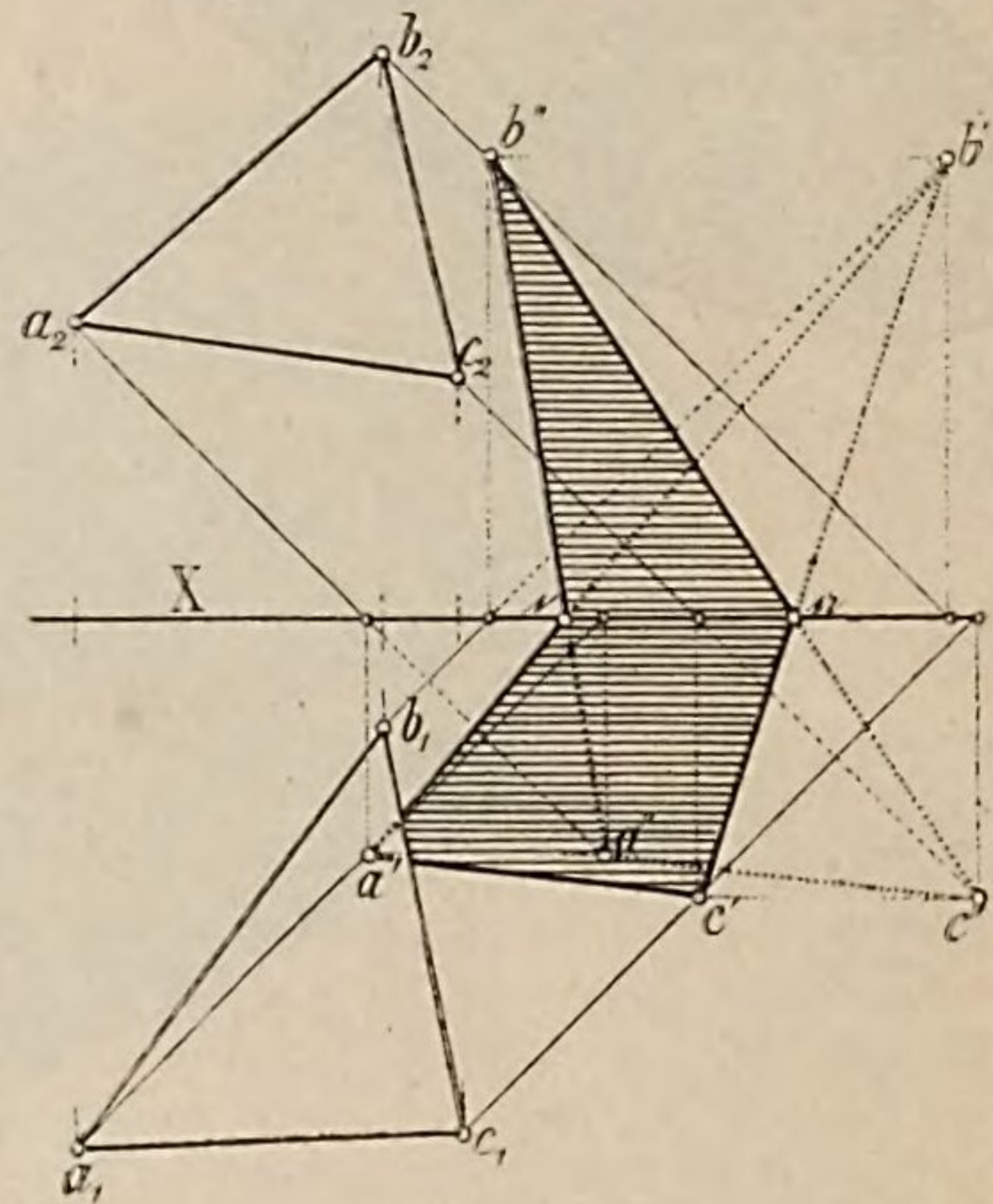
„Die Projektion einer ebenen Figur und ihre Schlagschattengrenze in die gleichnamige **Pr. Eb.** sind affine Figuren mit der Lichtrichtung als Affinitätsrichtung und der Spur der Ebene der Figur als Affinitätsachse.“

Die eben genannten affinen Beziehungen sind häufig mit Vorteil zu Konstruktionsvereinfachungen oder auch Genauigkeitsproben, wie dies die folgenden Beispiele zeigen werden, zu verwenden.

siehe Figur 82, gegeben, so versteht man unter dem Schlagschatten dieser Figur, im vorliegenden Falle also des Dreiecks abc auf eine Fläche, den von den Schlagschatten seiner Begrenzungsseiten eingeschlossenen Teil der Oberfläche der Schatten auffangenden Fläche. Die sämtlichen durch die Seiten des Schatten werfenden Vielecks gelegten Lichtebenen bilden ein Prisma, dessen Durchschnitt mit der Schatten auffangenden Fläche auf letzterer die Schlagschattengrenze des Schatten werfenden Vielecks erzeugt. Mit Beziehung auf Erkl. 126 lässt sich das oben Gesagte wie folgt zusammenfassen:

„Der Schlagschatten einer von Geraden begrenzten ebenen Figur auf eine Fläche ist begrenzt durch die Schnittlinie des die ebene Figur enthaltenden Lichtprismas mit der Schatten auffangenden Fläche. Ist letztere eine der **Pr. Ebn.**, so fällt die Schlagschattengrenze einer ebenen Figur auf eine der **Pr. Ebn.** zusammen mit der gleichnamigen Spur des die Figur enthaltenden Lichtprismas.“

Figur 82.

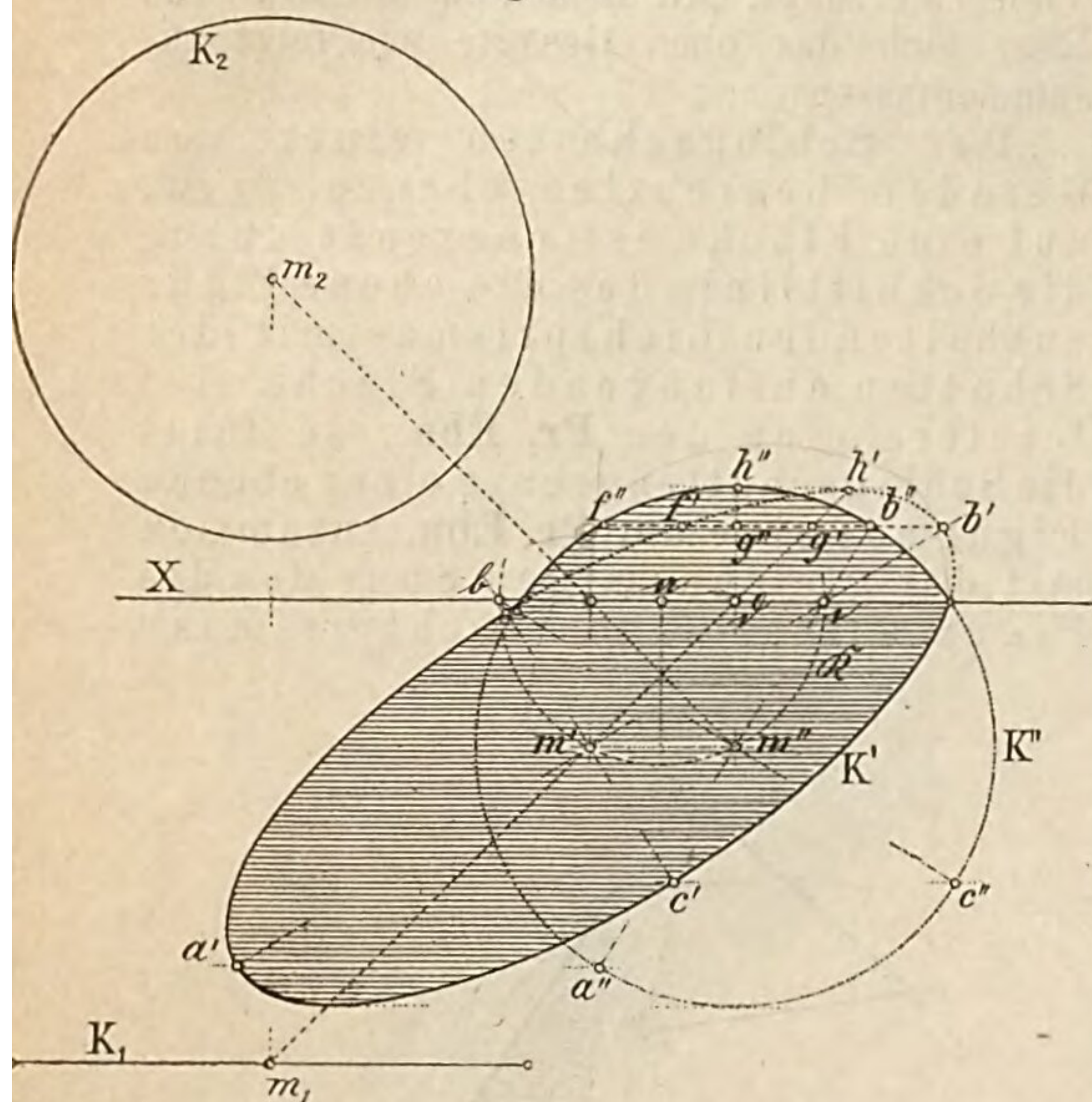


d) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 66. Eine zur **Pr. Eb.** E_2 parallele Kreisfläche K ist durch ihre Projektionen gegeben. Man soll den Schlagschatten der Kreisfläche auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 konstruieren.

Auflösung. Für den Kreis K , siehe Figur 83, geht das Lichtprisma in einen Lichtcylinder über, dessen Schnitt mit der **Pr. Eb.** E_2 ein zum Kreise K kongruenter Kreis K'' mit dem Mittelpunkte m'' sein wird.

Figur 83.



Aus K'' ergibt sich der Schlagschatten K' auf die **Pr. Eb.** E_1 als affine Figur zum Kreise K'' , d. h. als eine Ellipse K' mit dem Mittelpunkte m' .

Wollte man nun ganz beliebige Punkte der Ellipse K' konstruieren, so könnte man am raschesten wie folgt zum Ziele gelangen: Man zeichnet sich ein Paar entsprechende Gerade in beiden Figuren, und wählt hiezu zweckmässig gleich die Gerade m_1m' , denn ihr entspricht affin die Gerade $m''d$ senkrecht zur X -Achse.

Einer parallel zur X -Achse beliebig gezogenen Kreissehne z. B. $f''b''$ entspricht nun affin eine mit $f''b''$ zusammenfallende Ellipsensehne $f'b'$ von gleicher Länge wie $f''b''$ und dem Mittelpunkt g'' auf der Senkrechten zur X -Achse durch m'' . Analog findet man rasch eine hinlängliche Anzahl von Punkten zur Verzeichnung der Ellipse K' ohne Benützung der Projektionen von K .

Beispielsweise sind die zur X -Achse parallelen Kreistangenten zugleich Ellipsentangenten und es entsprechen den Kreisberührungspunkten, z. B. h'' , die Ellipsenberührungspunkte, z. B. h' .

Will man die Ellipse K' sehr genau zeichnen, so ist es ratsam ihre Hauptachsen zu konstruieren, was ebenfalls in sehr einfacher Weise geschehen kann: Beschreibt man nämlich durch die Punkte m' und m'' den Kreis $\mathcal{R}$, dessen Mittelpunkt a auf der X -Achse sich befindet, so schneidet derselbe die letztere Linie in zweien Punkten b und c , durch welche die gesuchten Hauptachsen der Ellipse K' hindurchgehen, denn den Linien $m'b$ und $m'c$ entsprechen im Kreise zwei, die Punkte b und c gleichfalls enthaltende aufeinander senkrechte Kreisdurchmesser $a''b''$ und $c''d''$ (d'' ist in der Figur, weil zu nahe an b liegend, nicht eingezeichnet), folglich sind die entsprechenden Ellipsendurchmesser $a'b'$ und $c'd'$ zu einander conjugiert, siehe Erkl. 144 und 154, I. Teil, und weil aufeinander senkrecht stehend, die Hauptachsen der Ellipse K' .

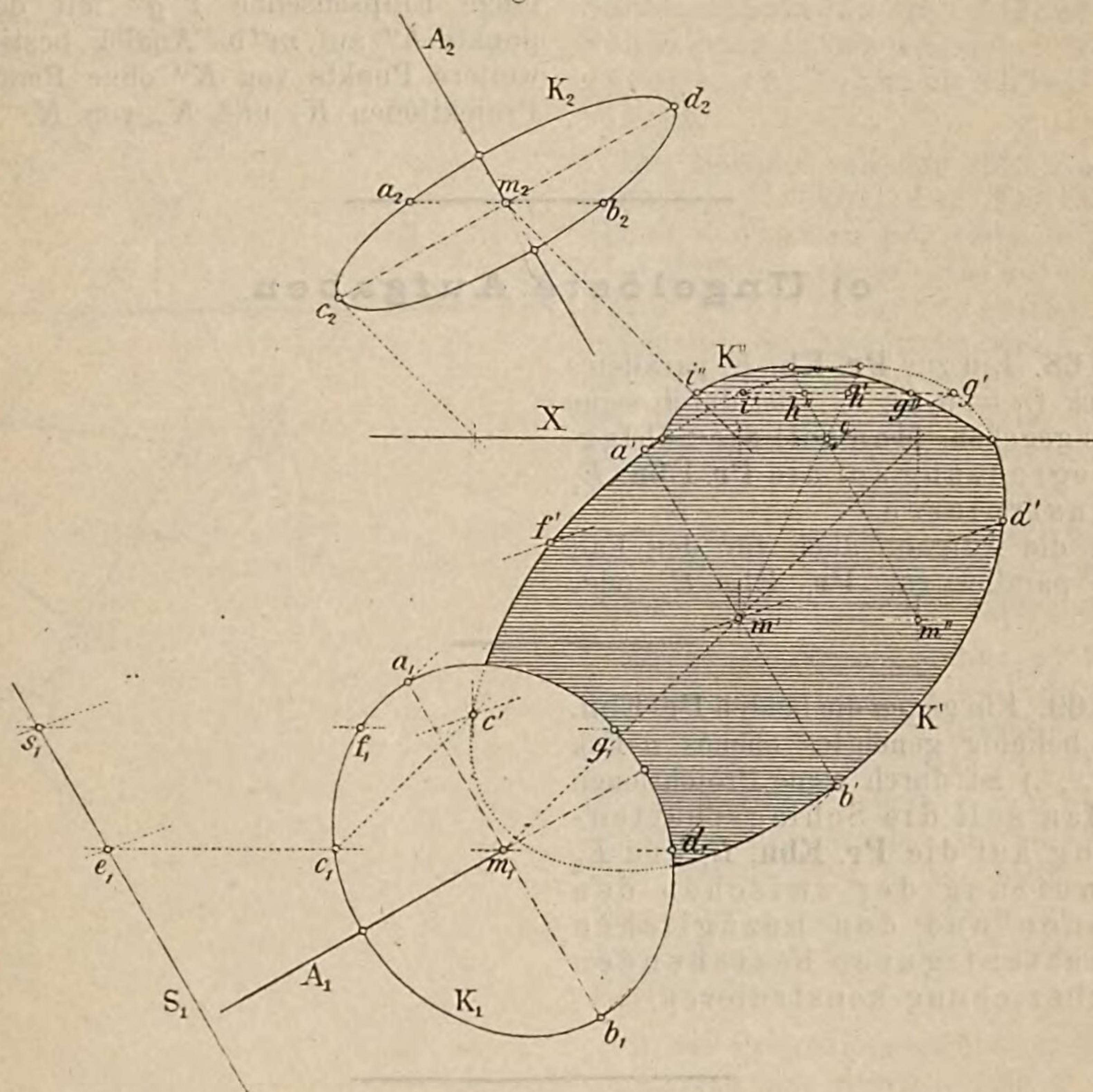
Die Anwendung der eben angegebenen Konstruktion ist besonders zweckmässig, wenn man die Schlagschatten einer Reihe von Kreisen, deren Ebenen zu einer der **Pr. Eb.** parallel laufen, zu konstruieren hat, weil in diesem Fall die Achsen sämtlicher Schlagschattenellipsen einerseits beziehungsweise zu einander parallel gerichtet sind und andererseits bezüglich ihrer Längen gleiches Verhältnis besitzen, daher zur Bestimmung ihrer Lage die oben angegebene Konstruktion nur einmal auszuführen ist.

Man löse die Aufgabe 66 für den Fall die Kreislinie K parallel zur **Pr. Eb.** E_1 , oder parallel zur **Pr. Eb.** E_2 sein soll.

Aufgabe 67. Eine auf einer gegebenen Geraden A senkrecht stehende und durch ihre Projektionen bestimmte Kreisfläche ist gegeben. Man soll die Begrenzung des von der Kreisfläche auf den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 hervorgerufenen Schlagschattens konstruieren.

Auflösung. Man bestimme zunächst, siehe Figur 84, den Schlagschatten K' des Kreises K auf die **Pr. Eb.** E_1 unter Benützung der affinen Beziehung zwischen der Projektion K_1 und der zu zeichnenden Ellipse K' .

Figur 84.



Die Affinitätsachse S_1 ergibt sich als erste Spur der Kreisebene (S_1 ist parallel zu $a_1 b_1$ und geht durch die erste Spur e_1 der Geraden cd). Bestimmt man ausserdem den Punkt m' als erste Spur des Lichtstrahles durch m , so ist alles gegeben, was zur Verzeichnung der Ellipse K' nötig ist.

Dem Durchmesser $c_1 d_1$ von K_1 entspricht beispielsweise der durch e_1 gehende Ellipsendurchmesser $c' d'$. Zieht man nun in K_1 eine

Reihe von Sehnen parallel zu $c_1 d_1$ ($f_1 g_1$ ist eine solche Sehne), so entsprechen denselben Ellipsensehnen parallel zu $c' d'$; der Sehne $\overline{f_1 g_1}$ von K_1 entspricht die Sehne $\overline{f' g'}$ von K' ; beide Linien schneiden sich in s_1 auf S_1 .

Das auf die **Pr. Eb.** E_2 fallende Stück der Schlagschattenbegrenzung bestimmt man wie in voriger Aufgabe mittels Annahme von zur X -Achse parallelen Ellipsensehnen in K' und Ermittlung der entsprechenden Sehnen in K'' . Zu diesem Zwecke zeichne man den Punkt m'' als zweite Spur des Lichtstrahles durch m , ziehe $m'd$ (d Halbpunkt der auf X liegenden Ellipsensehne von K') und $m''d$, so entspricht der beliebig gewählten zur X -Achse parallelen Ellipsensehne $\overline{i' g'}$ von K' die mit $\overline{i' g'}$ zusammenfallende und gleich lange Ellipsensehne $\overline{i'' g''}$ mit dem Mittelpunkt h'' auf $m''d$. Analog bestimmen sich weitere Punkte von K'' ohne Benützung der Projektionen K_1 und K_2 von K .

e) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 68. Ein zur **Pr. Eb.** E_1 paralleles ebenes n -Eck ($n = 6, 8 \dots$) ist durch seine Projektionen gegeben. Man soll die Schlagschattenbegrenzung auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 konstruieren.

Man löse die Aufgabe auch für den Fall das n -Eck parallel zur **Pr. Eb.** E_2 oder E_3 sei.

Aufgabe 69. Ein gegen die beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 beliebig geneigtes ebenes n -Eck ($n = 6, 8 \dots$) ist durch seine Projektionen gegeben. Man soll die Schlagschattenbegrenzung auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 unter Benützung der zwischen den Projektionen und den bezüglichen Schlagschattenfiguren bestehenden Affinitätsbeziehung konstruieren.

f) Schlagschatten einer Linie auf eine Fläche.

Frage 72. Wie konstruiert man zweckmässig den Schlagschatten einer Linie auf eine beliebige Fläche?

Antwort. Sehr häufig kommt man in die Lage, ausser dem Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** auch noch den Schlagschatten einer Linie auf eine andere Fläche als die **Pr. Eb.** konstruieren zu müssen. In diesem Falle be-

nützt man aber in einfacher Weise den Schlagschatten der in Rede stehenden Gebilde auf eine der **Pr. Ebn.** zur Lösung der vorstehenden Aufgabe:

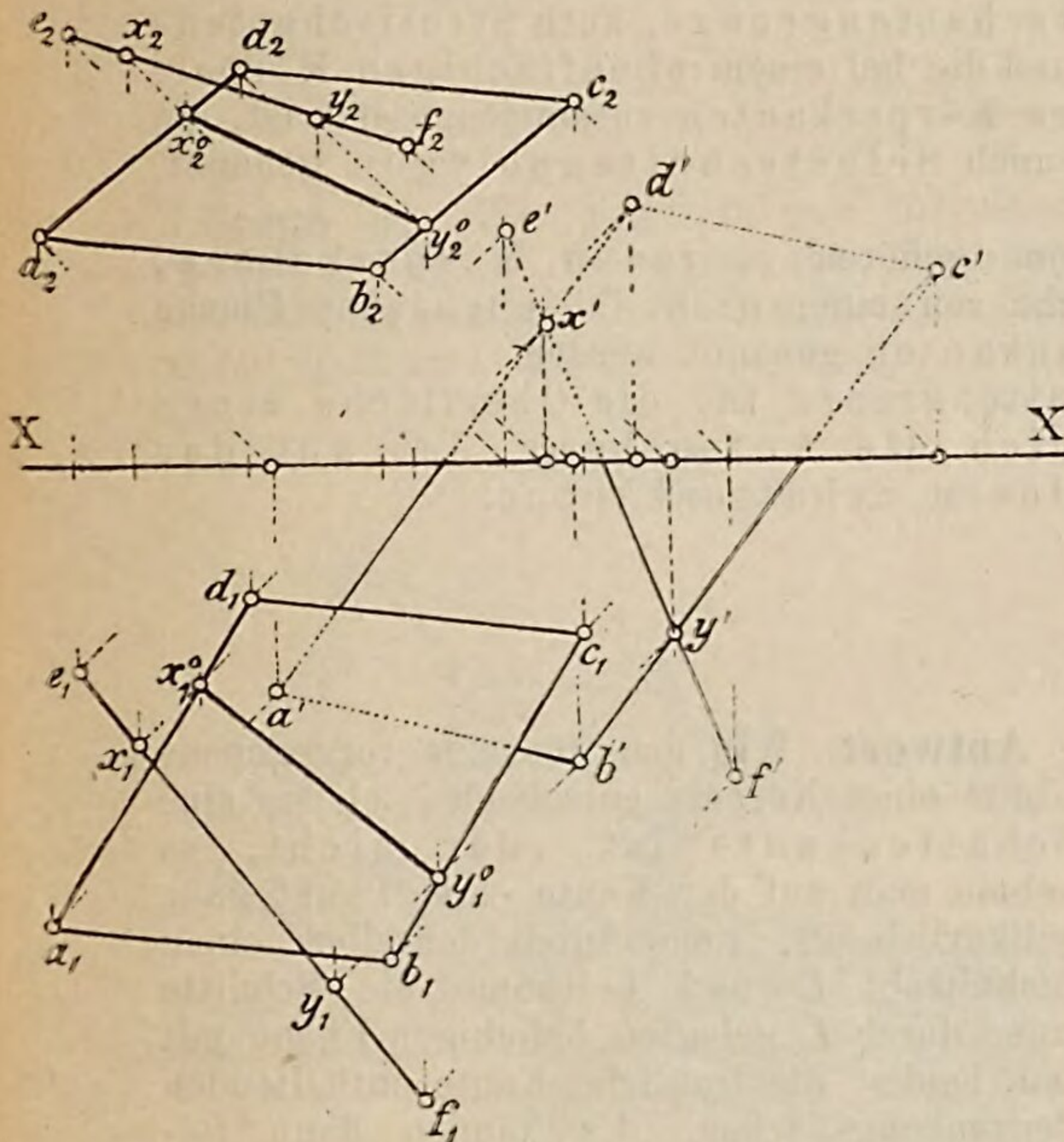
Man bestimmt nämlich den Schlagschatten der Fläche, sowie jenen der Linie auf eine, gleichgültig welche, **Pr. Eb.** Dasjenige Stück der Schattengrenze der Linie, das innerhalb der Begrenzung des Schlagschattens der Fläche liegt, entspricht jenem Stücke der Linie im Raume, das seinen Schatten nicht auf die **Pr. Eb.**, sondern auf die Fläche wirft. Man erhält daher die Punkte der Schattengrenze auf jener Fläche als Durchschnittspunkte der durch jene innerhalb der Begrenzung des Schlagschattens der Fläche liegenden Schlagschattenpunkte der Linie gezogenen Lichtstrahlen mit der Fläche.

Ein Beispiel soll das eben Angeführte erläutern: „Es soll der Schlagschatten einer Geraden ef , siehe Figur 85, auf die Fläche eines Parallelogrammes $abcd$ konstruiert werden.“ Man bestimme die Schlagschattenbegrenzung $a'b'c'd'$ des Parallelogrammes $abcd$, sowie jene $e'f'$ der Geraden ef . Die Linie $e'f'$ schneidet nun die Begrenzung $a'b'c'd'$ in den Punkten x' und y' und dasjenige Stück xy der Geraden ef , dessen Schlagschatten auf die **Pr. Eb.** E_1 mit $x'y'$ zusammenfiel, wirft seinen Schatten auf die Ebene $abcd$.

Zieht man durch x' und y' Lichtstrahlen, so treffen dieselben sowohl die Geraden ad und bc als auch die Gerade ef , und zwar erstere in den Punkten x^0 und y^0 , letztere in den Punkten x und y und da der Schlagschatten einer Geraden auf eine Ebene wieder eine Gerade sein muss, siehe Antwort der Frage 70, so erhält man in der Strecke x^0y^0 den Schlagschatten der Geraden ef auf die Ebene $abcd$.

In der Projektionszeichnung, siehe Figur 85, zieht man also durch x' und y' Parallele zur ersten Projektion der Lichtrichtung, erhält auf den Geraden a_1d_1 , b_1c_1 und e_1f_1 die Punkte x_1^0 , y_1^0 , x_1 und y_1 , denen in der zweiten Projektion die Punkte x_2^0 , y_2^0 , x_2 und y_2 entsprechen. Die Strecken $x_2^0y_2^0$ und $x_1^0y_1^0$ sind die Projektionen des Schlagschattens der Geraden ef auf die Ebene $abcd$.

Figur 85.



C) Ueber die Konstruktion der Selbst- und Schlagschattengrenzen ebenflächiger Körper.

a) Selbstschatten ebenflächiger Körper.

Anmerkung 29. Während bei Linien und Flächen lediglich von einem Schlagschatten, welchen dieselben auf anderen Flächen erzeugen die Rede sein kann, gibt es auf der Oberfläche eines Körpers selbst Punkte, welche von der Lichtquelle kein Licht empfangen können, weil die Lichtstrahlen schon an anderer Stelle auf die Körperoberfläche getroffen und daselbst ihr Licht abgegeben haben. Solche Punkte, zu welchen die Lichtstrahlen erst nach Durchdringung der Masse des Körpers gelangen könnten, befinden sich im Schatten, und zwar im Selbstschatten, auch Eigen- oder Streifschatten genannt, des Körpers.

Auf der Oberfläche eines jeden Körpers wird demnach eine Linie vorhanden sein, welche die beleuchteten Punkte von den kein Licht empfangenden Punkten trennt, welche man die Selbstschattengrenze, auch Streifschattengrenze, des betreffenden Körpers nennt und die bei einem ebenflächigen Körper, d. h. bei einem Polyeder aus gewissen Körperkanten zusammengesetzt ist, die ein Polygon, das Streifpolygon oder auch Selbstschattenpolygon genannt, bilden.

Die einzelnen Seiten des Streifpolygons gehören zu jenen Körperkanten, welche je eine beleuchtete Körperfläche von einer nicht beleuchteten Fläche trennen und aus diesem Grunde Schattenkanten genannt werden.

Die Konstruktion der Selbstschattengrenze für die Oberfläche eines Polyeders erfordert also lediglich die Aufsuchung der auf der Oberfläche des Körpers vorhandenen Schattenkanten.

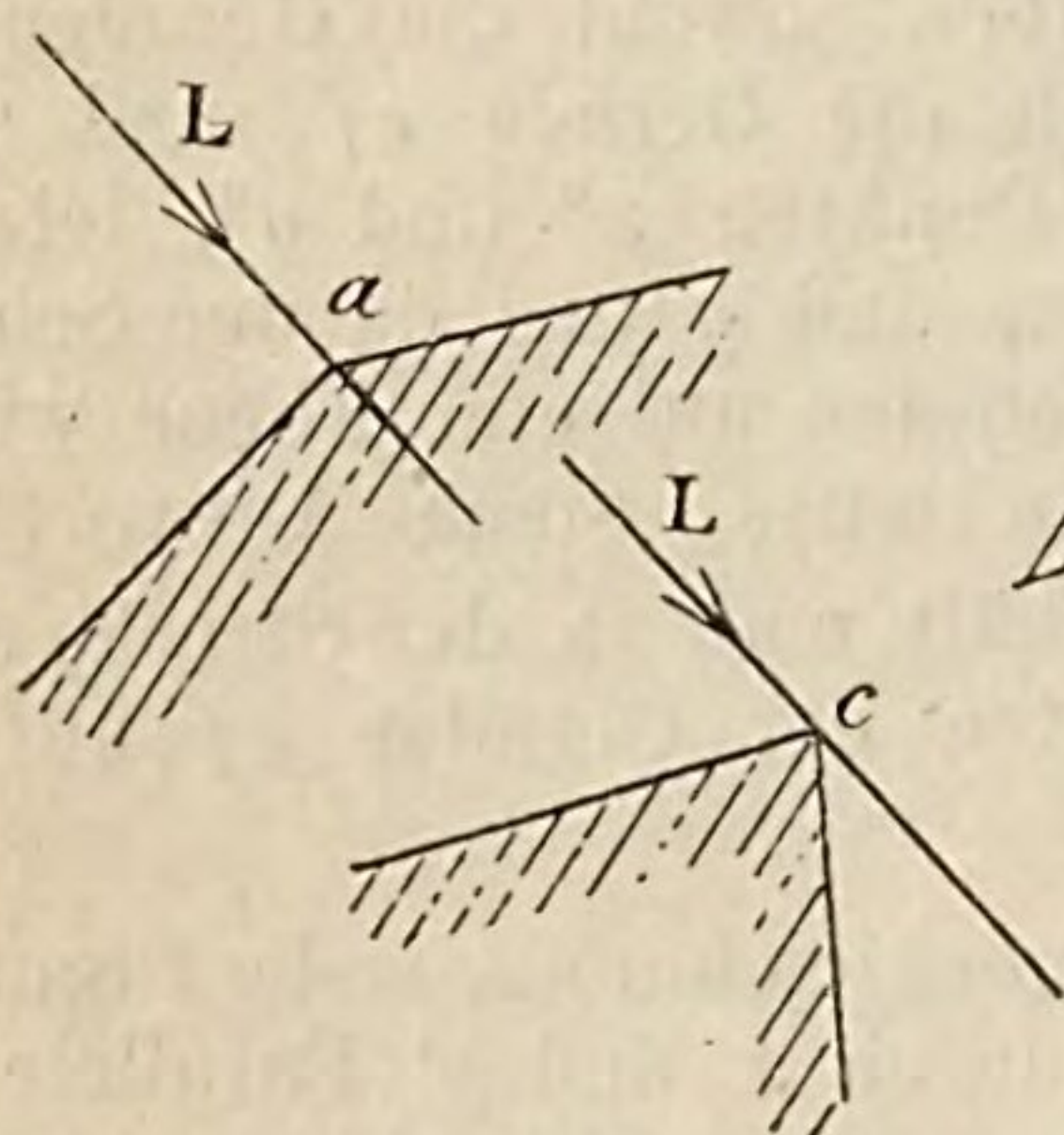
Frage 73. Wie entscheidet man, ob auf der Oberfläche eines Körpers eine bestimmte Kante eine Schattenkante ist oder nicht?

Antwort. Will man für eine vorgegebene Kante eines Körpers entscheiden, ob sie eine Schattenkante ist oder nicht, so nehme man auf der Kante einen Punkt ganz willkürlich an, ziehe durch denselben einen Lichtstrahl L und bestimme die Schnitte einer durch L gelegten beliebigen Ebene mit den beiden die fragliche Kante enthaltenden Begrenzungsflächen. Es können dann folgende Fälle eintreten:

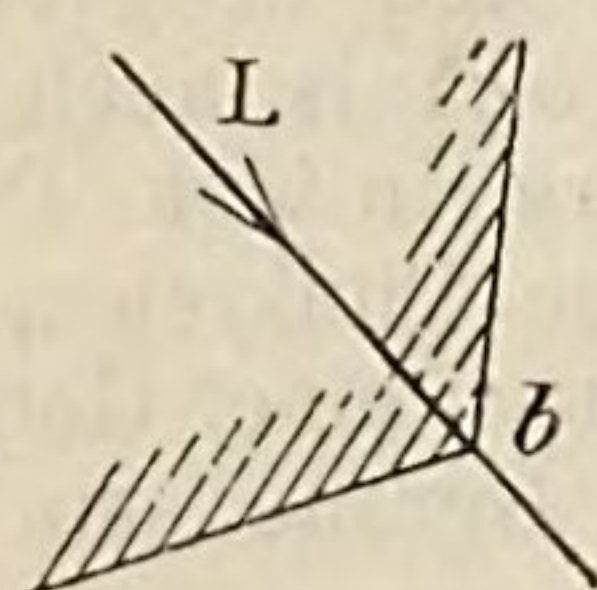
a) Die Schnittlinien der Lichtebene L mit den genannten Begrenzungsflächen haben gegen die Lichtrichtung L die Lage wie in Figur 86 a. Bezeichnet der schraffierte Teil die Seite, auf welcher das Materiale des Körpers sich befindet, so erkennt man leicht, dass im vorliegenden Falle die beiden die Kante durch a enthaltenden Flächen beleuchtet sein müssen, dass also die gemeinsame Kante keine Schattenkante sein kann.

b) Haben die Schnittlinien der Lichtebene L mit den beiden die zu untersuchende Kante enthaltenden Begrenzungsflächen gegen die Lichtrichtung L die Lage wie in Figur 86 b, so erkennt man, dass die Lichtstrahlen erst durch das Materiale des Körpers hindurchgehen müssten, um auf die beiden, die zu

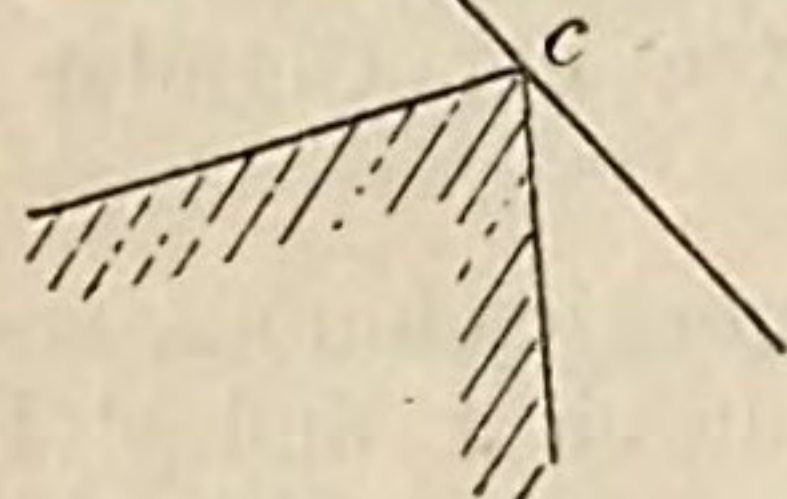
Figur 86 a.



Figur 86 b.



Figur 86 c.



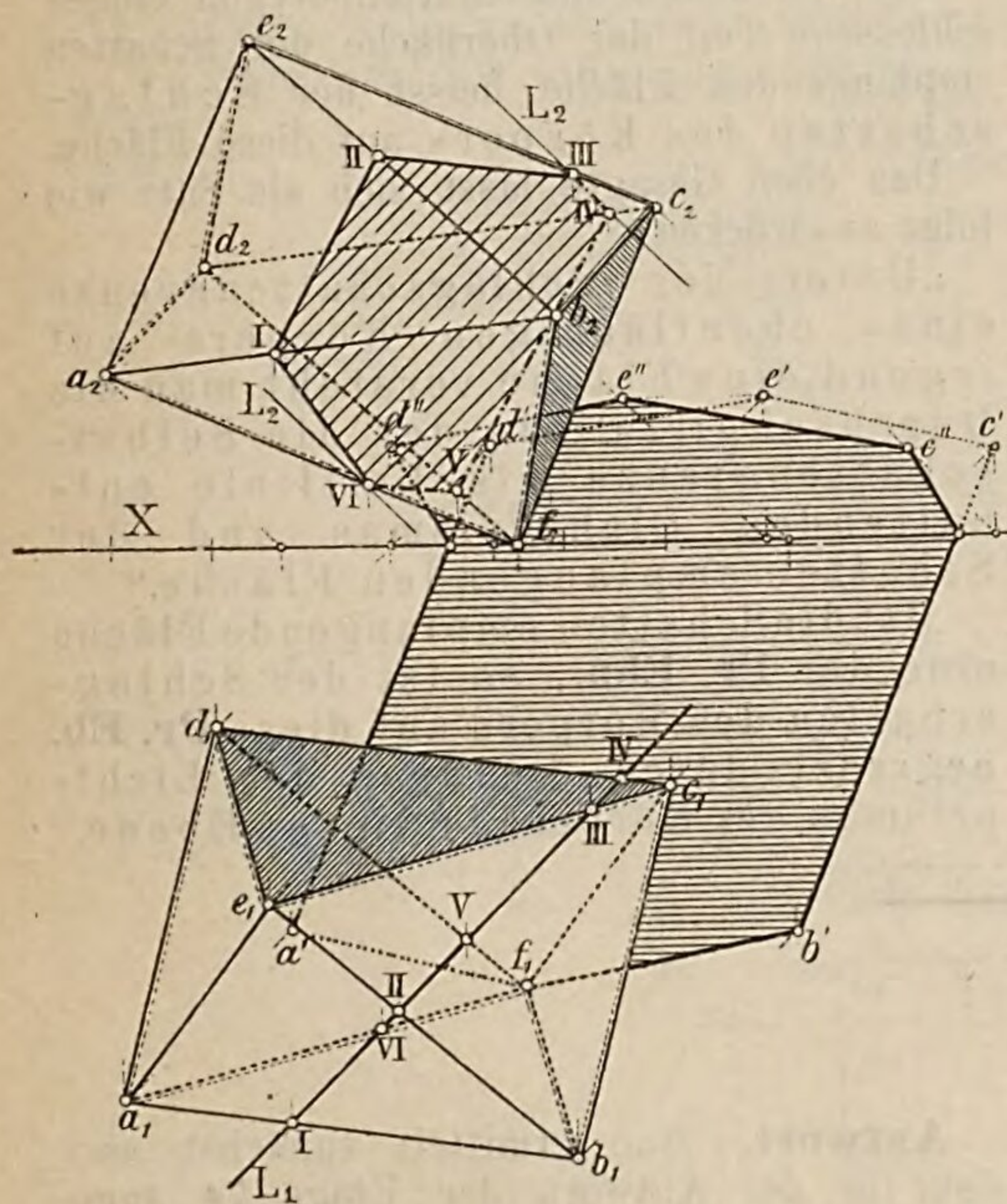
untersuchende Kante enthaltenden Flächen zu treffen, woraus hervorgeht, dass keine der genannten Flächen beleuchtet, also ihre gemeinsame Kante keine Schattenkante sein kann.

Es bleibt noch übrig der Fall

c) in welchem die beiden Schnittlinien der Lichtebene L mit den beiden die zu untersuchende Kante enthaltenden Begrenzungsflächen gegen die Lichtrichtung eine Lage einnehmen wie in Figur 86c, aus welcher Lage ersichtlich ist, dass nur auf die eine der beiden Flächen Licht gelangen kann. Die gemeinsame Kante trennt somit eine beleuchtete von einer kein Licht empfangenden Fläche, und ist daher eine Schattenkante, d. h. eine Seite des Streif- oder Selbstschattenpolygons.

Frage 74. Wie ermittelt man für einen ebenflächigen Körper die Selbstschattengrenze, d. h. die Seiten des Streifpolygons?

Figur 87.



Antwort. Man schneidet den Körper durch eine Lichtebene, welche ausserdem, der Einfachheit halber, noch zu einer der **Pr. Ebn.**, etwa zur **Pr. Eb. E_1** , senkrecht stehen kann und bestimmt die Schnittfigur I—II—III—IV—V—VI in der zweiten Projektion, siehe Figur 87. Zieht man nun an dieses Polygon parallel zu L_2 jene Strahlen, welche gerade durch eine Ecke des Polygons gehen, ohne dasselbe noch in weiteren Punkten zu treffen, also gegen die beiden in der Ecke zusammenstossenden Kanten die Lage haben wie L in Figur 85c, so gehen im vorliegenden Falle diese Strahlen durch die Ecken III und VI, d. h. die diese Ecken enthaltenden Körperkanten ce und af gehören als Schattenkanten der Selbstschattengrenze an.

Nun ist aber unmittelbar aus der Figur 87 mit Rücksicht auf die Schnittfigur I bis VI ersichtlich, dass die Flächen abf , abe , ade und bcc beleuchtet, die übrigen also im Schatten sind. Als Streifpolygon, d. h. als Selbstschattengrenze für den in Figur 87 dargestellten Körper erhält man das Polygon $edafbce$.

Erkl. 129. In der Regel wird zur Festlegung der Selbstschattengrenze für einen allgemeinen Körper schon ein einziger parallel zur Lichtrichtung geführter Schnitt ausreichen, wenn die schneidende Ebene möglichst viele Körperkanten trifft. Sollte jedoch mittels eines Schnittes die

Gestalt der Selbstschattengrenze nicht zu erkennen sein, so führe man eben noch einen zweiten Schnitt parallel zum ersten, und zwar so, dass die durch den ersten Schnitt nicht getroffenen Körperkanten nunmehr zum Schnitt gelangen. Man erhält auf diese Weise wieder Schattenkanten, welche im Verein mit den schon erhaltenen die Gestalt des Streifpolygons festlegen werden.

b) Schlagschatten ebenflächiger Körper.

Frage 75. Was versteht man unter dem Schlagschatten eines ebenflächigen Körpers auf eine zweite Fläche?

Antwort. Zieht man durch sämtliche Punkte des Streifpolygons eines Körpers Lichtstrahlen, so bilden dieselben ein Prisma, das Lichtprisma des betreffenden Körpers und dieses schneidet die Oberfläche des Körpers oder aber die Fläche eines zweiten Körpers nach einem Polygon, dem Schlagschattenpolygon oder der Schlagschattengrenze des Körpers auf sich selbst oder auf die Oberfläche eines zweiten Körpers.

Der von dem Schlagschattenpolygon eingeschlossene Teil der Oberfläche der Schatten empfangenden Fläche heisst der Schlagschatten des Körpers auf diese Fläche.

Das eben Gesagte lässt sich als Satz wie folgt ausdrücken:

„Unter der Schlagschattengrenze eines ebenflächigen Körpers auf irgend eine Fläche versteht man die Durchschnittslinie des die Selbstschattengrenze als Leitlinie enthaltenden Lichtprismas und der Schatten empfangenden Fläche.“

„Ist die Schatten empfangende Fläche eine der **Pr. Ebn.**, so ist der Schlagschatten des Körpers auf diese **Pr. Eb.** begrenzt durch die Spur des Lichtprismas des Körpers in dieser Ebene.“

Frage 76. Wie konstruiert man die Schlagschattengrenze eines ebenflächigen Körpers auf eine der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 ?

Erkl. 130. Will man möglichst rasch und sicher konstruieren, so ist stets zu empfehlen, das Schlagschattenpolygon auf die eine **Pr. Eb.** voll und ganz zu konstruieren, und aus ersterem den auf die **Pr. Eb.** E_2 treffenden Teil als affine Figur zu diesem zu ermitteln.

Antwort. Man ermittelt zunächst nach dem in der Antwort der Frage 74 angegebenen Verfahren die Selbstschattengrenze des Körpers, d. h. das Streifpolygon und bestimmt die Schlagschatten der Endpunkte desselben auf eine der **Pr. Ebn.**, etwa der **Pr. Eb.** E_1 , dieselbe vorerst als unbegrenzt vorausgesetzt. Mit Rücksicht auf die zwischen den Schlagschattenfiguren bestehende affine

Beziehung ermittelt man nun aus dem einen Schlagschatten den anderen, analog wie in den früheren Beispielen, Frage und Antw. 71, sowie Erkl. 120 und 125.

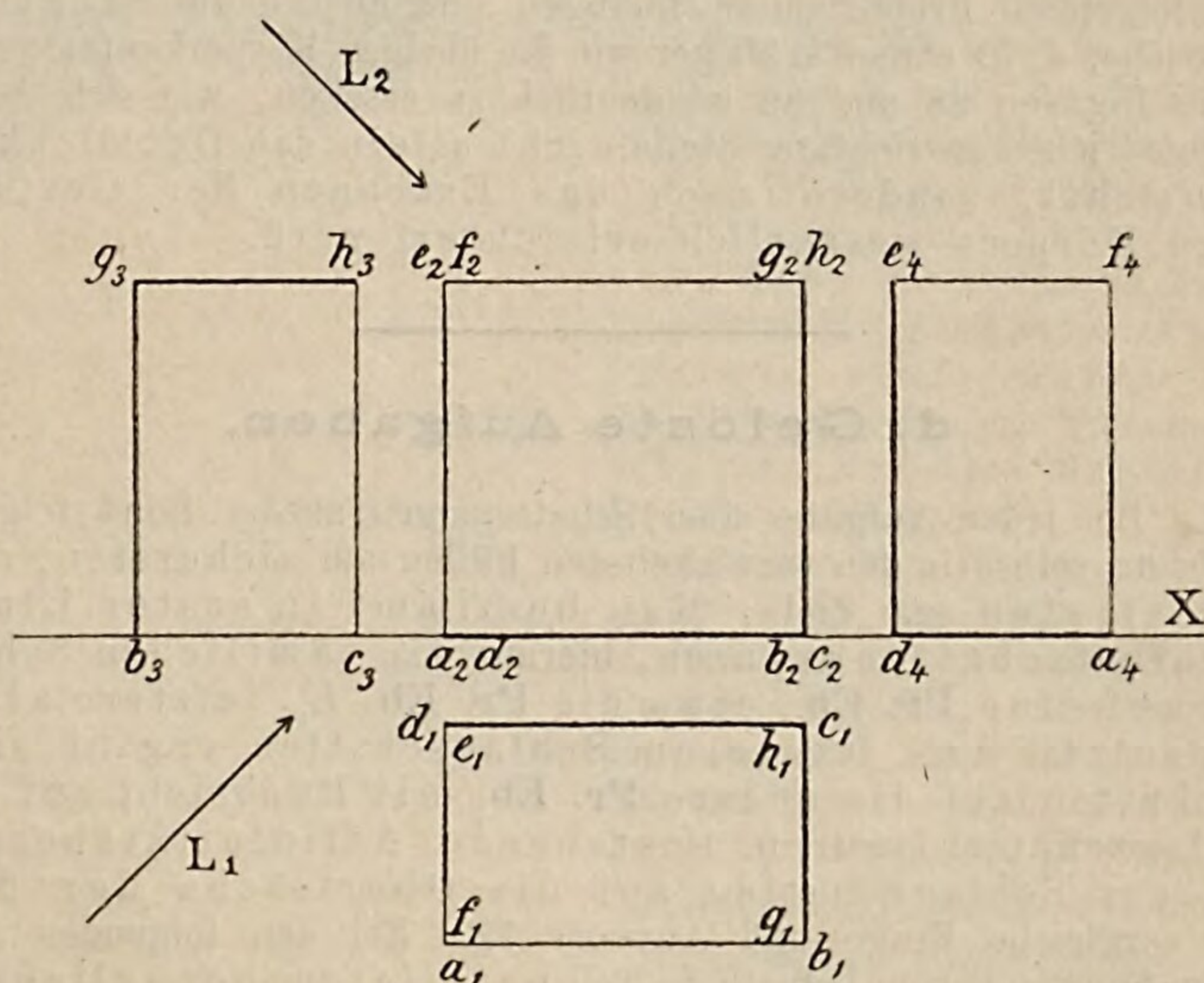
So ist z. B. in Figur 87 der Schlagschatten $a'f'b'c'e'd'a'$ auf die **Pr. Eb. E_1** ermittelt worden. Den Punkten c' , e' und d' entsprechen die Punkte c'' , e'' und d'' gelegen auf den Parallelen zur X -Achse durch die erstgenannten Punkte, sowie auf den Lichtstrahlen durch c_2 , e_2 und d_2 .

c) Ueber die Bedeutung der Schattenkanten in technischen Zeichnungen.

Anmerkung 30. Die besondere Hervorhebung von Schattenkanten findet in technischen Zeichnungen häufig statt, auch dann, wenn von der Darstellung des Selbst- und Schlagschattens eines Körpers abgesehen wird. Man macht solche Schattenkanten in der Zeichnung in der Regel durch stärkere Linien bemerklich und nennt dieselben dann kurzweg Schattenlinien oder Schattenstriche. Doch herrscht bezüglich der Auswahl der Schattenstriche bzw. der Anbringung derselben in technischen Zeichnungen noch nicht überall vollkommene Uebereinstimmung. Zweckmässig erscheint es jedenfalls als Schattenstriche nur die Schattenkanten eines Körpers im Sinne der Anmerkung 29 zu wählen.

Durch die Anbringung von Schattenstrichen wird die Projektionszeichnung nicht allein übersichtlicher, sondern auch die Form des dargestellten Gegenstandes leichter erkennbar, als ohne solche Linien. Einige Beispiele sollen dies zeigen:

Figur 88.



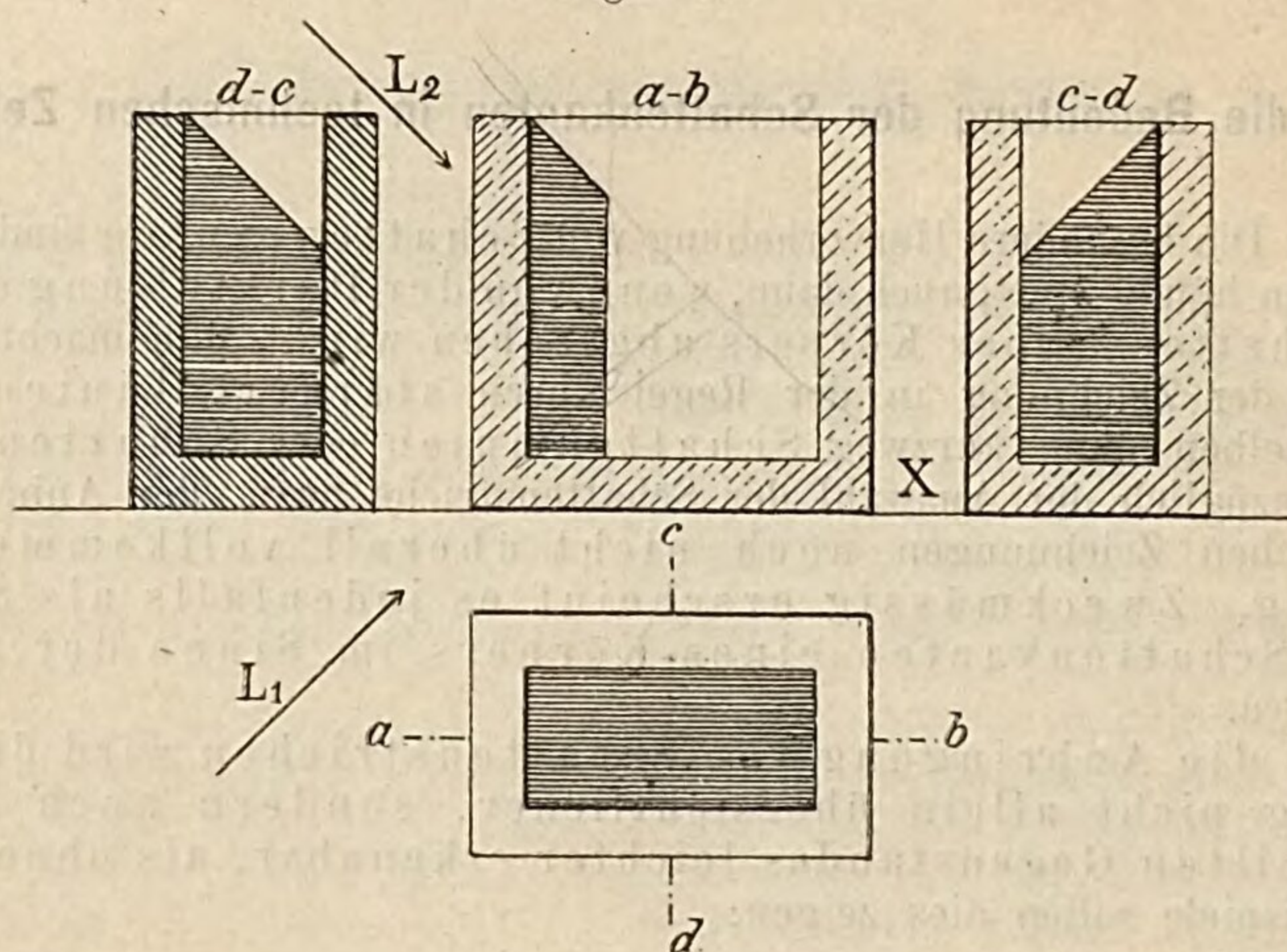
In Figur 88 ist ein rechtwinkliges Parallelepipiped durch seine Projektionen dargestellt. Sollen nun in jeder Projektion Schattenstriche gezeichnet werden, so sind für die erste Projektion die obere rückwärtige Kante e_1h_1 , desgleichen die obere rechtseitige Kante g_1h_1 , weil Schattenkanten, kräftiger zu zeichnen.

Für die zweite Projektion ergeben sich die untere vordere Kante a_2b_2 , sowie die vordere rechtseitige Kante b_2g_2 als Schattenstriche.

In der dritten Projektion, für welche die **Pr. Eb.** E_3 mit der Fläche $adef$ zusammenfällt, sind als Schattenstriche die Kanten b_3g_3 und g_3h_3 , in vierter Projektion, **Pr. Eb.** E_4 , fällt zusammen mit der Fläche $bchg$ die Kanten d_4e_4 und d_4a_4 als solche zu ziehen.

In Figur 89 ist ein hohles rechteckiges Parallelepiped durch seine erste Projektion, sowie durch Vertikalschnitte nach den Linien ab , cd und dc dargestellt und sind gleichfalls die Schattenstrichen im Sinne der Anmerkung 28 durch stärker gezeichnete Linien hervorgehoben worden.

Figur 89.



In den folgenden Projektionszeichnungen sind überall die Schattenkanten als Schattenstriche, d. h. etwas kräftiger wie die übrigen Körperkanten gezeichnet worden.

Aus den Figuren 88 und 89 ist deutlich zu ersehen, wie sich durch Anbringung von Schattenstrichen an richtiger Stelle nicht allein die Deutlichkeit der Zeichnung vermehrt, sondern auch das Erkennen der Gestalt des dargestellten Körpers wesentlich erleichtert wird.

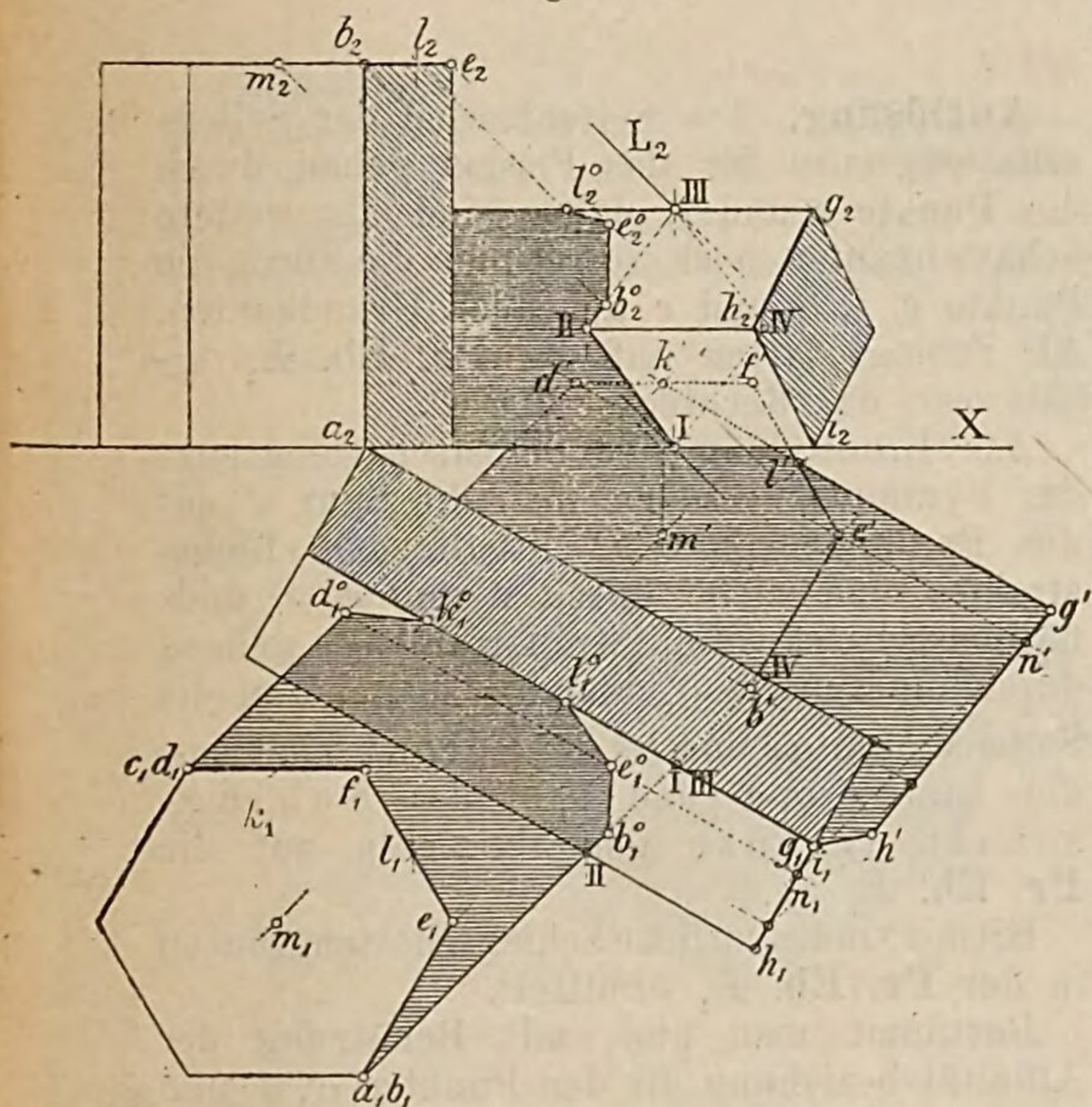
d) Gelöste Aufgaben.

Anmerkung 31. Bei jeder Aufgabe über Schattenkonstruktion führt folgendes Konstruktionsverfahren, selbst in den verwickeltsten Fällen am sichersten, raschesten und zweckmässigsten zum Ziele: Man bestimmt in erster Linie die sämtlichen Selbstschattengrenzen, hierauf die sämtlichen Schlagschattengrenzen auf eine **Pr. Eb.**, etwa die **Pr. Eb.** E_1 , letztere als unbegrenzt vorausgesetzt. Aus letzterem Schlagschatten ergibt sich dann der Schlagschatten auf die andere **Pr. Eb.** mit Rücksicht auf die zwischen den Schlagschattenfiguren bestehende Affinitätsbeziehung, desgleichen der Schlagschatten auf die Oberfläche der dargestellten Körper, vergleiche Frage und Antwort 72. Bei den folgenden Aufgaben wurde stets der im Selbstschatten befindliche Teil parallel zur bezüglichen Projektion der Lichtrichtung, der Schlagschatten aber parallel zur X -Achse schraffiert.

Aufgabe 67. Für die in Figur 89 dargestellte Körperzusammenstellung, zwei senkrechte Prismen, von welchen das eine sechseckige zur **Pr. Eb.** E_1

senkrecht steht, während das andere vierseitige Prisma gegen die **Pr. Eb.** E_2 unter 30° geneigt ist und mit einer Seitenkante in der **Pr. Eb.** E_1 liegt, soll die gesamte Schattenkonstruktion durchgeführt werden.

Figur 90.



Auflösung. Mit Bezug auf Anmerkung 31 bestimme man zunächst die Selbstschattengrenzen beider Prismen; für das sechsseitige Prisma erhält man unmittelbar die beiden Seitenkanten $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ ($c_2 d_2$ ist in der Figur 90 nicht eingeschrieben), welche die Kanten der oberen Grundfläche in zwei Gruppen teilen, von welchen die rechtseitige Gruppe mit den Kanten $\overline{df}$, $\overline{fe}$ und $\overline{eb}$ dem Streifpolygon angehört. Der Schlagschatten dieses Prismas auf die **Pr. Eb.** E_1 ist somit begrenzt durch das Schlagschattenpolygon $a_1 b' e' f' d' c_1$.

Zur Konstruktion des Selbstschattens für das zweite Prisma benützt man gleich die durch die Kante $\overline{ab}$ gehende Lichtebeane, welche aus dem genannten Prisma das Viereck I, II, III, IV ausschneidet, wodurch die die Punkte I und III enthaltenden Kanten als Schattenkanten gekennzeichnet werden, siehe Antwort der Frage 74. Als weitere Schattenkanten kommen hinzu die Grundkanten $\overline{gh}$ und $\overline{hi}$. Als Schlagschatten der Punkte g, h und i auf die **Pr. Eb.** E_1 ergeben sich die Punkte g', h' und i' . Durch g' geht parallel zur Prismenrichtung der Schlagschatten der Seitenkante durch g . Hiemit sind die gesamten Schlagschattengrenzen auf die **Pr. Eb.** E_1 gezeichnet. Ein sichtbarer Schlagschatten auf die **Pr. Eb.** E_2 ist im vorliegenden Beispiele nicht vorhanden.

Aus der Lage der Schlagschattenpolygone ersieht man, dass ein Teil des Schlagschattens des sechsseitigen Prismas in den Schlagschattenraum des andern Prismas fällt, woraus hervorgeht, dass vom ersteren Prisma ein Schlagschatten auf dem Mantel des zweiten Prismas entsteht.

Zunächst schneiden sich die Linien $d' f'$ und $f' e'$ mit der Linie $g' k'$ in den Punkten k', l' , denen auf der Seitenkante durch g_1 die Punkte k_1^0 und l_1^0 entsprechen und letztere Punkte sind die ersten Projektionen der Schlagschatten der Punkte k und l (in der Figur 90 ist nur der Punkt l eingeschrieben) der Kanten $\overline{df}$ und $\overline{fe}$ auf das zweite Prisma.

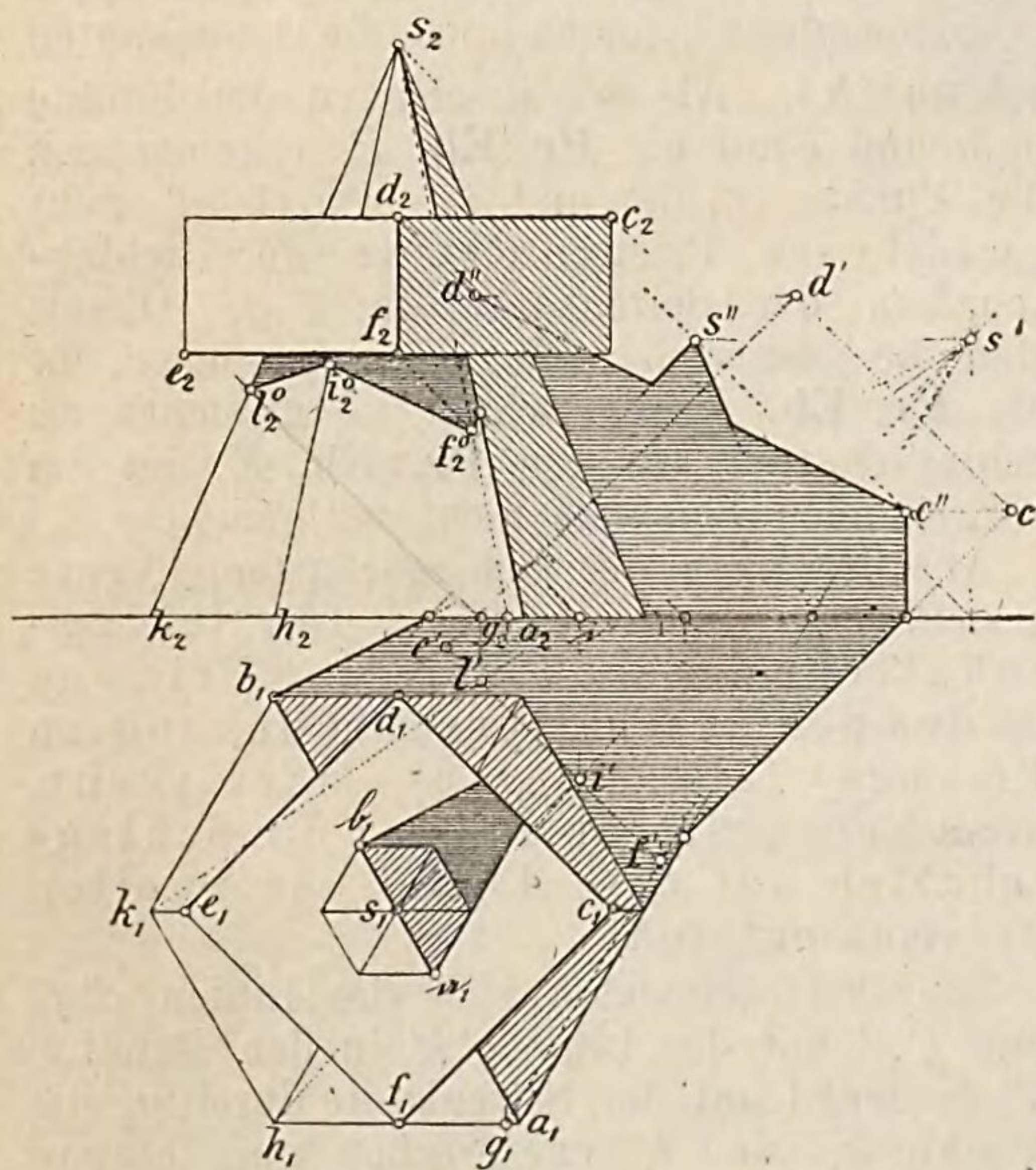
Zufolge der Stellung der beiden Prismen zu einander ist die Verbindungslinie $d' e'$ parallel zur Seitenkantenrichtung des zweiten Prismas und es kann die Linie $d' e'$ als Parallelprojektion einer Geraden $d^0 e^0$ auf dem Prisma aufgefasst werden, deren erste Projektion $d_1^0 e_1^0$ durch den dem Punkte n' (n' -Schnittpunkt von

$d'e'$ mit $g'h'$) entsprechenden Punkt n_1 (auf g_1h_1 liegend) hindurchgeht. Die Punkte d_1^0 und e_1^0 geben die ersten Projektionen der Schlagschatten der Punkte d und e auf das zweite Prisma; in gleicher Weise ist auch der Punkt b_1^0 bestimmt worden.

Die zweiten Projektionen der Schlagschattenpunkte $b^0, e^0, l^0 \dots$ ergeben sich durch Hinaufprojizieren; b_2^0 liegt auf II—III, l_2^0 auf der Seitenkante durch g_2 , e_2^0 auf dem Lichtstrahle durch e_2 .

Aufgabe 70. Für die in Figur 91 dargestellte Körperzusammenstellung, sechseckige Pyramide durchdrungen von einem zur **Pr. Eb. E_1** senkrechten Prisma mit quadratischer Grundfläche, dessen Achse mit der Pyramidenachse zusammenfällt, soll die gesamte Schattenkonstruktion durchgeführt werden.

Figur 91.



Auflösung. Die Seitenkanten der Selbstschattengrenze für das Prisma gehen durch die Punkte e und f , daher sind als weitere Schattenkanten noch zu rechnen die durch die Punkte e, f, d und c gehenden Grundkanten. Als Schlagschatten auf die **Pr. Eb. E_1** erhält man das Rechteck $e'f'c'd'$.

Zur Ermittlung der Selbstschattengrenze der Pyramide bestimme man die Spur s' des die Pyramidenspitze s enthaltenden Lichtstrahles und ziehe durch s' an das Grundflächensechseck die Streifstrahlen, gehend durch die Punkte a_1 und b_1 , so gehören die Seitenkanten as und bs der Selbstschatten-, die Linien a_1s' und b_1s' der Schlagschattengrenze der Pyramide auf die **Pr. Eb. E_1** an.

Hiemit sind sämtliche Schlagschattengrenzen in der **Pr. Eb. E_1** ermittelt.

Bestimmt man nun, mit Benützung der Affinitätsbeziehung die den Punkten c', d' und s' entsprechenden Punkte c'', d'' und s'' , so ist hiedurch auch der auf der **Pr. Eb. E_2** treffende Teil des Schlagschattens bestimmt.

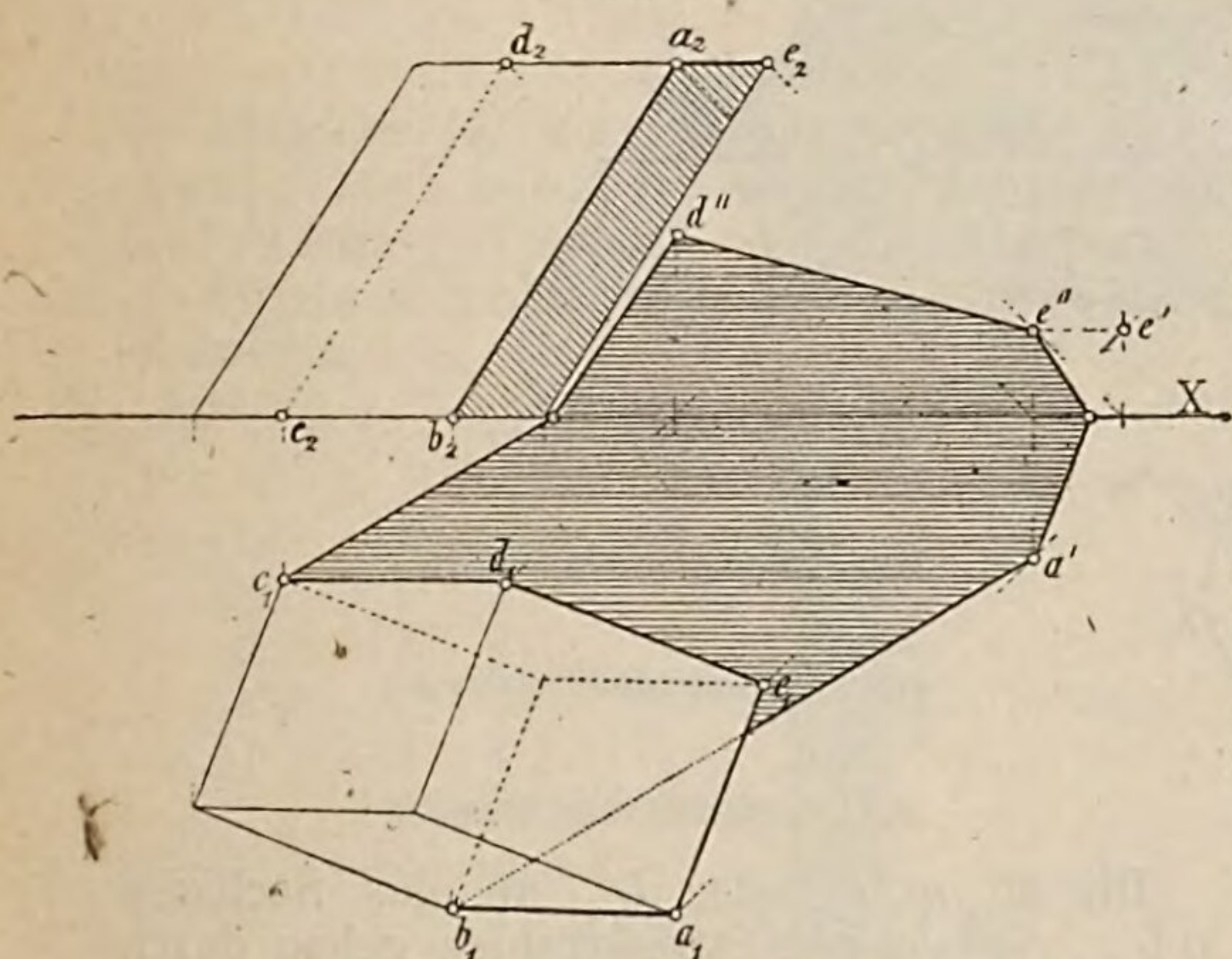
Aus der Lage der Schlagschattenpolygone erkennt man, dass sowohl von der Pyramide Schlagschatten auf dem Prisma als auch umgekehrt entsteht. Ersterer ergibt sich in zweifacher Weise; entweder zieht man durch die Punkte a_1 und b_1 Parallele zu $s'a_1$ und $s'b_1$, oder man zieht durch die Schnittpunkte von $c'd'$ mit den Linien $s'a'$ und $s'b'$ (in der Figur nicht bezeichnet) Parallele zu L_1 , so liefern diese auf c_1d_1 Punkte, welche mit a_1 und b_1 , bzw. verbunden, gleichfalls den Schlagschatten der Kanten as und bs auf die obere Grundfläche in erster Projektion bestimmen.

Den Schlagschatten des Prismas auf die Pyramide konstruiert man wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Die Konstruktion ist für die Punkte l_2^0 , i_2^0 und f_2^0 ersichtlich gemacht. Um z. B. den Punkt l^0 auf der Seitenkante ks zu erhalten, ziehe man $s'k_1$, welche Linie die Gerade $e'f'$ in l' schneidet; projiziert man l' auf die X -Achse und zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Parallele zu L_2 , so liefert diese auf s_2k_2 den Punkt l_2^0 ; in gleicher Weise bestimmt sich i_2^0 . Der Punkt f_2^0 gibt die zweite Projektion des Schlagschattens des Punktes f ; man ziehe $s'f'$ bis zum Schnitt g_1 mit a_1h_1 , bestimme g_2 auf der X -Achse, so liegt auf g_2s_2 , sowie auf dem Lichtstrahle durch f_2 der Punkt f_2^0 .

Aufgabe 71. Für das gegen die **Pr. Ebn. E_1** und E_2 beliebig geneigte, mit seiner Grundfläche in der **Pr. Eb. E_1** liegende Prisma ist die Schattenkonstruktion durchzuführen.

Figur 92.



Antwort. Man lege, siehe Figur 92, durch eine Seitenkante, etwa gleich ab eine Lichtebene, d. h. man ziehe durch den Punkt a einen Lichtstrahl und bestimme die Spur dieser Lichtebene (geht durch die Spuren b_1 und a' der Seitenkante ab , sowie des Lichtstrahles durch a) und ziehe parallel zu dieser Spur b_1a' die Streifstrahlen an das Grundflächen-vieleck (im vorliegenden Falle ist $a'b_1$ schon ein solcher Streifstrahl, der zweite geht durch c_1 parallel zu $a'b_1$).

Die Seitenkanten ba und cd bestimmen die Selbstschattengrenze, zu welcher als weitere Schattenkanten noch hinzutreten die Kanten de und ea der oberen Grundfläche. Die Bestimmung des Schlagschattens erfolgt wie früher.

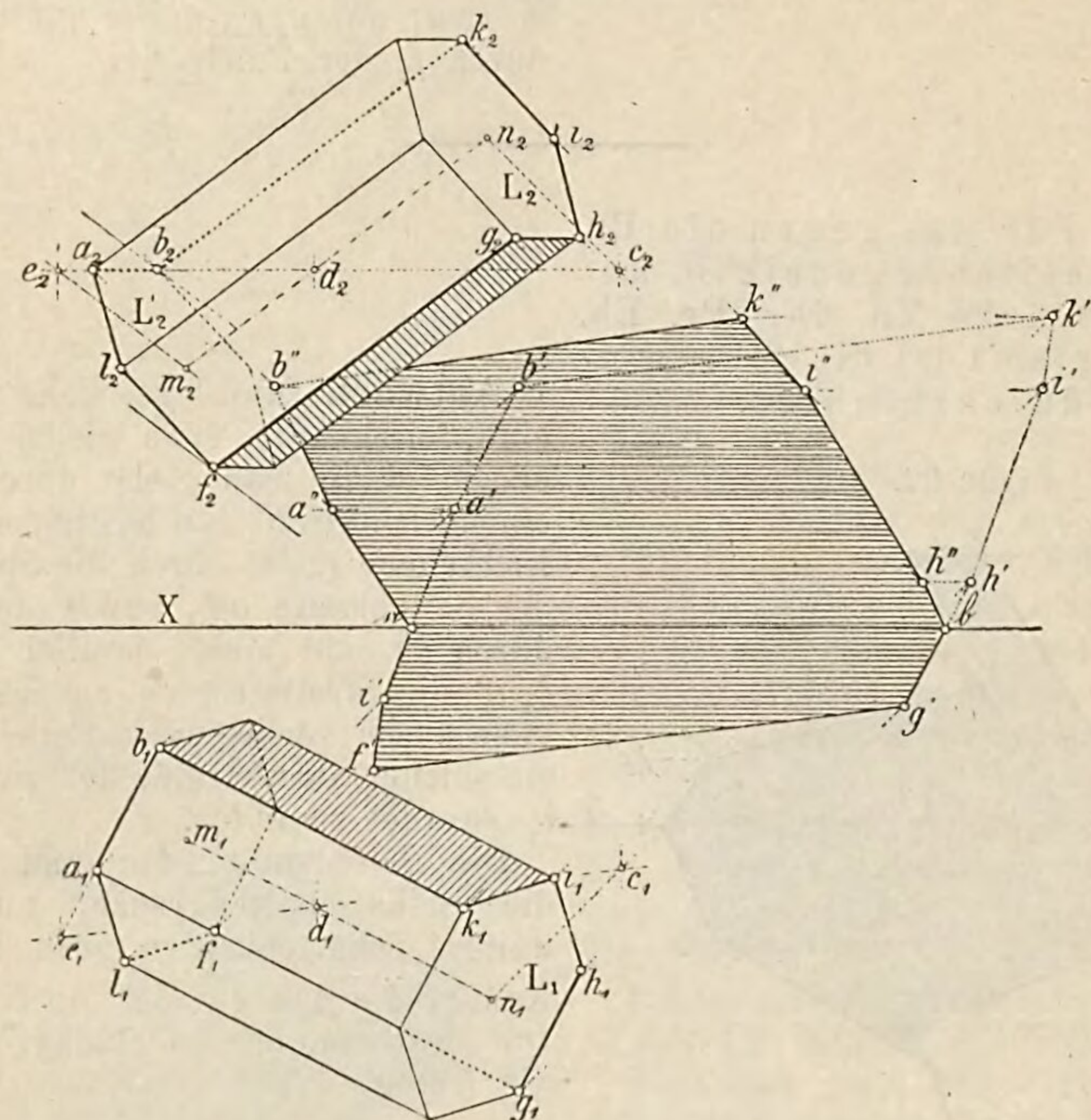
Aufgabe 72. Ein beliebig im Raume liegendes, regelmässiges, sechsseitiges Prisma ist durch seine Projektionen auf die **Pr. Ebn. E_1** und E_2 gegeben. Es soll die Schattenkonstruktion für das Prisma durchgeführt werden.

Auflösung. Zur Bestimmung der Selbstschattengrenze lege man etwa durch die Achse mn , siehe Figur 93, des Prismas eine Lichtebene, bestimme deren Schnittlinie mit einer der Grundflächen, etwa mit der Grundfläche $mab \dots$ und ziehe parallel zu dieser Schnittlinie an das Grundflächen-sechseck die Streifstrahlen, so bestimmen letztere die Seitenkanten der Selbstschattengrenze.

Zur Ausführung der angedeuteten Konstruktion ziehe man etwa durch den Punkt n ,

siehe Figur 93, einen Lichtstrahl L , so ist durch L und die Linie $m n$ die obengenannte Lichtebene vollständig bestimmt, und da der Punkt m der unteren Grundfläche angehört, so ist derselbe schon ein Punkt der gesuchten Schnittlinie. Sucht man nun noch den Schnittpunkt einer der Grundkanten, etwa gleich der Grundkante $a b$ mit der Ebene $m n L$, so erhält man hiefür, siehe Aufgabe 85, I. Teil, den Punkt e , und $e m$ ist die gesuchte Schnittlinie.

Figur 93.

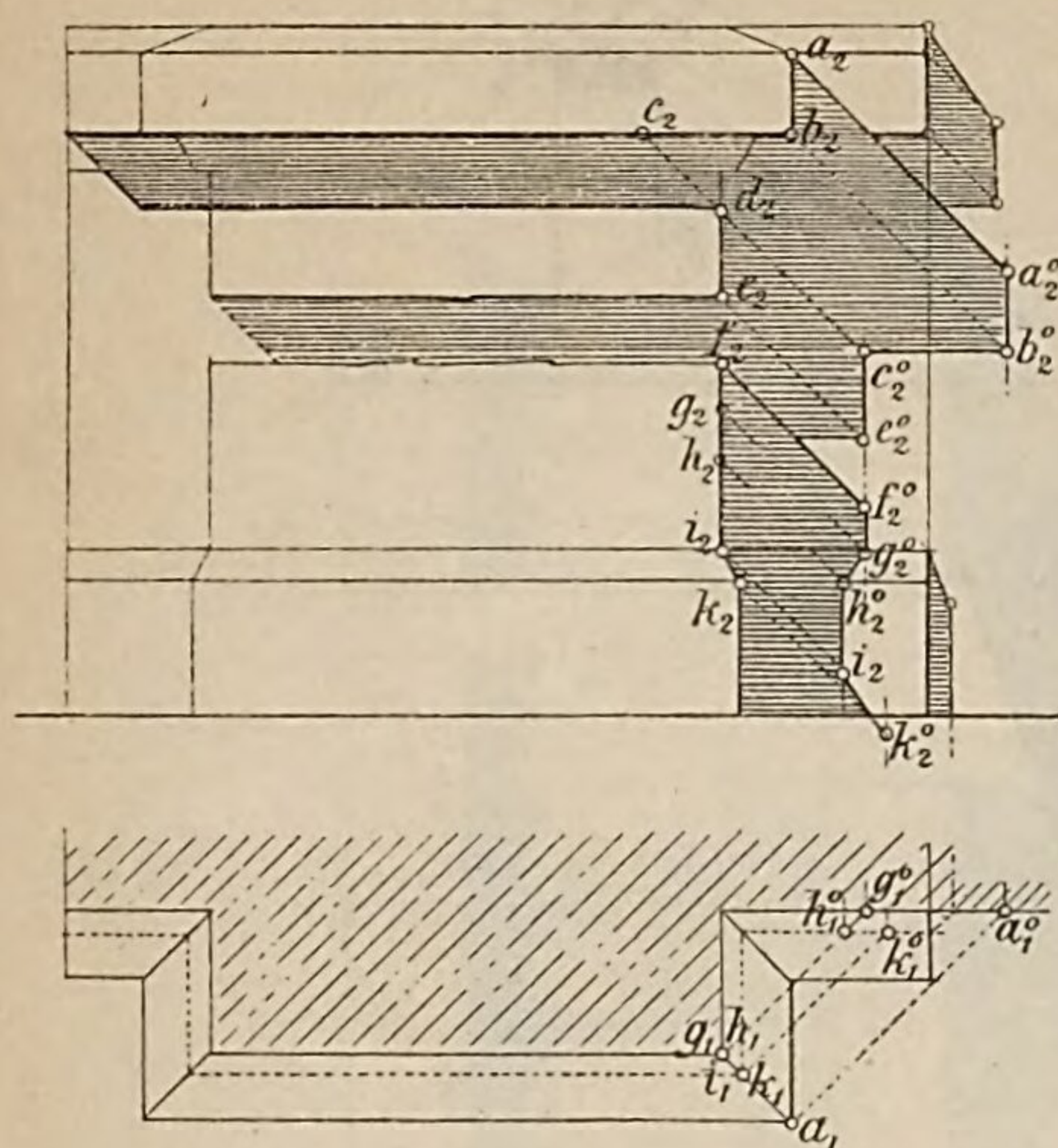


Die zu $m_2 e_2$ oder L'_2 an das Sechseck $a b \dots$ gezogenen Streifstrahlen gehen durch die Ecken a und f und bestimmen hiedurch das Streifpolygon $b k i h g f l a b$, dem als Schlagschatten auf die **Pr. Eb. E_1** das Polygon $b' k' i' h' g' f' l' a' b'$ entspricht, aus welchem sich der auf die **Pr. Eb. E_2** treffende Teil wie früher bestimmt.

Aufgabe 73. Für die in Figur 94 dargestellte Gesimsfläche sind die auftretenden Schattengrenzen zu konstruieren.

Auflösung. Von einer Selbstschattengrenze kann bei der vorliegenden Darstellung keine Rede sein, es ist vielmehr lediglich der Schlagschatten auf den Körper selbst, sowie auf die rückwärtige vertikale Wand, über welche das Gesimse vorsteht, darzustellen.

Figur 94.

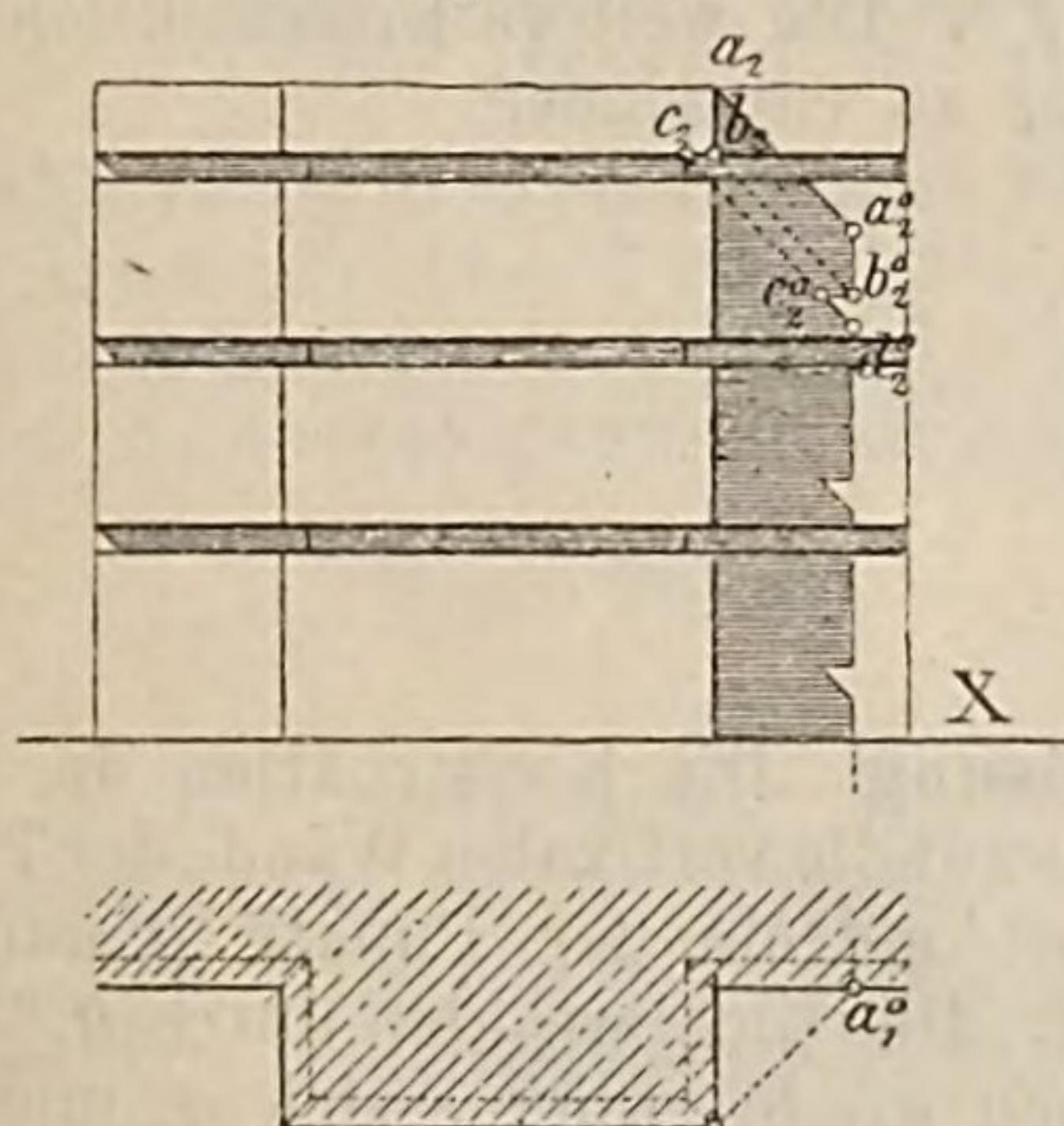


Die Konstruktion der Schlagschattengrenze ist mit zu Hilfenahme einer ersten Projektion durchgeführt. Linie $a b$ wirft ihren Schatten nach $a_2^0 b_2^0$, so dass $a_2^0 b_2^0$ parallel $a_2 b_2$ läuft, $b_2^0 c_2^0$ ist parallel zu $b_2 c_2$ und wird von der Parallelen durch g_2^0 (mittels des Lichtstrahles durch g_1 findet sich g_1^0 , aus g_1^0 bestimmt sich g_2^0) zu $i_2 d_2$ in c_2^0 getroffen; der Lichtstrahl durch c_2^0 liefert auf $i_2 d_2$ den Punkt d_2 , durch welchen der Schlagschatten der vordersten Gesimskante $b c \dots$ auf den Körper selbst hindurchgeht. Wie man aus der Figur 93 ansehen kann, ist der mittlere Wandpfeiler abgebrochen gedacht, so dass auch von der unteren vorderen Kante des oberen Teiles ein Schlagschatten auf die rückwärtige Wand entsteht. Die weitere Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich, man erkennt, dass ein Teil der Kante $f_2 i_2$ Schatten auf die schiefe Fläche nach $g_2^0 h_2^0$, sowie auf die vordere Vertikalfläche nach $h_2^0 i_2^0$ *, ferner das Stückchen $i_2 k_2$ seinen Schatten nach $i_2^0 k_2^0$ wirft.

*) In der Figur 94 ist irrtümlich i_2 statt i_2^0 geschrieben.

Aufgabe 74. Für die in Figur 95 dargestellte pfeilerartige Wandverstärkung (Lisene) sollen die auftretenden Schattengrenzen ermittelt werden.

Figur 95.



Auflösung. Der Schlagschatten auf die rückwärtige vertikale Wand ist nach der Linie $a_2^0 b_2^0 c_2^0 d_2^0$ gebrochen, deren Konstruktion aus der Figur direkt ersichtlich ist. Der Lichtstrahl durch d_2^0 *) liefert die beiden Schlagschattenpunkte c_2^0 und d_2^0 , ersterer liegt auf der Parallelen zur X -Achse durch b_2^0 , letzterer auf der verlängerten $a_2^0 b_2^0$.

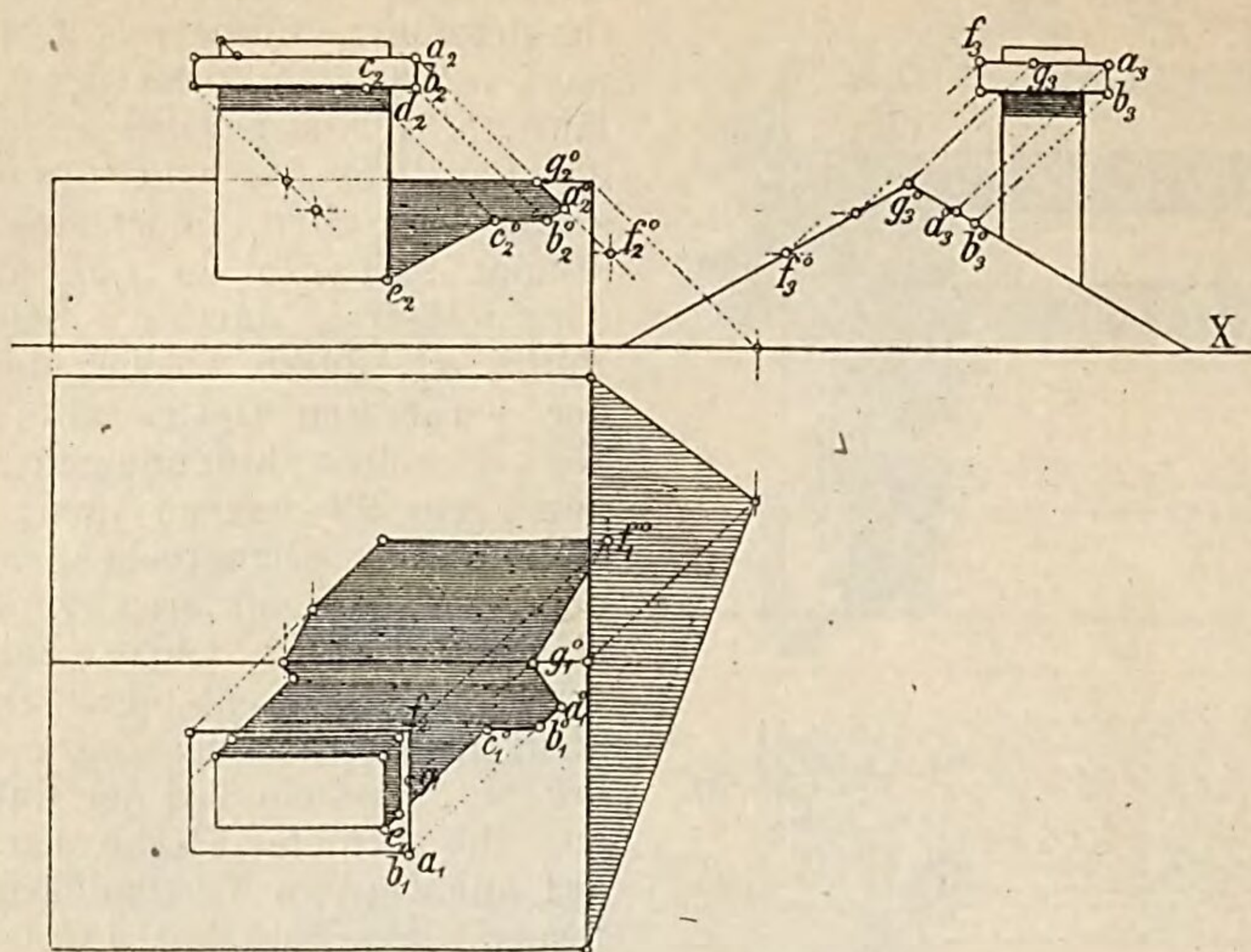
*) Punkt d_2 liegt auf der verlängerten $a_2 b_2$ und ist in der Figur 95 nicht eingeschrieben.

Aufgabe 75. Für die in Figur 96 dargestellte Körperzusammenstellung, Kamin, der über eine Dachfläche hervorragt, sind die auftretenden Schattengrenzen zu ermitteln.

Auflösung. Ausser der ersten Projektion ist hier noch eine dritte Projektion auf die **Pr. Eb. E_3** behufs rascherer Durchführung der Konstruktion zu Hilfe genommen.

Der Schlagschatten der Kante $b a$ bestimmt sich mittels der Punkte a_3 und b_3 , aus welchen sich a_3^0 und b_3^0 , sowie a_2^0 , b_2^0 ergeben, aus welchen letzteren Punkten dann die Punkte a_1^0

Figur 96.



und b_1^0 sich finden. Die Parallele durch b_1^0 zur Firstlinie gibt auf dem Lichtstrahle durch e_1 den Punkt c_1^0 . Mittels g_3^0 bestimmt sich g_3 und hieraus g_1 sowie g_1^0 . Man findet aber auch g_2^0 ohne zu Hilfenahme der dritten Projektion g_3 , indem der Lichtstrahl durch a_2 die Firstlinie in g_2^0 schneidet, woraus sich g_1^0 bestimmt. Mittels f_3 findet sich f_3^0 und hieraus f_2^0 und f_1^0 . Die weitere Konstruktion ist aus der Figur zu entnehmen.

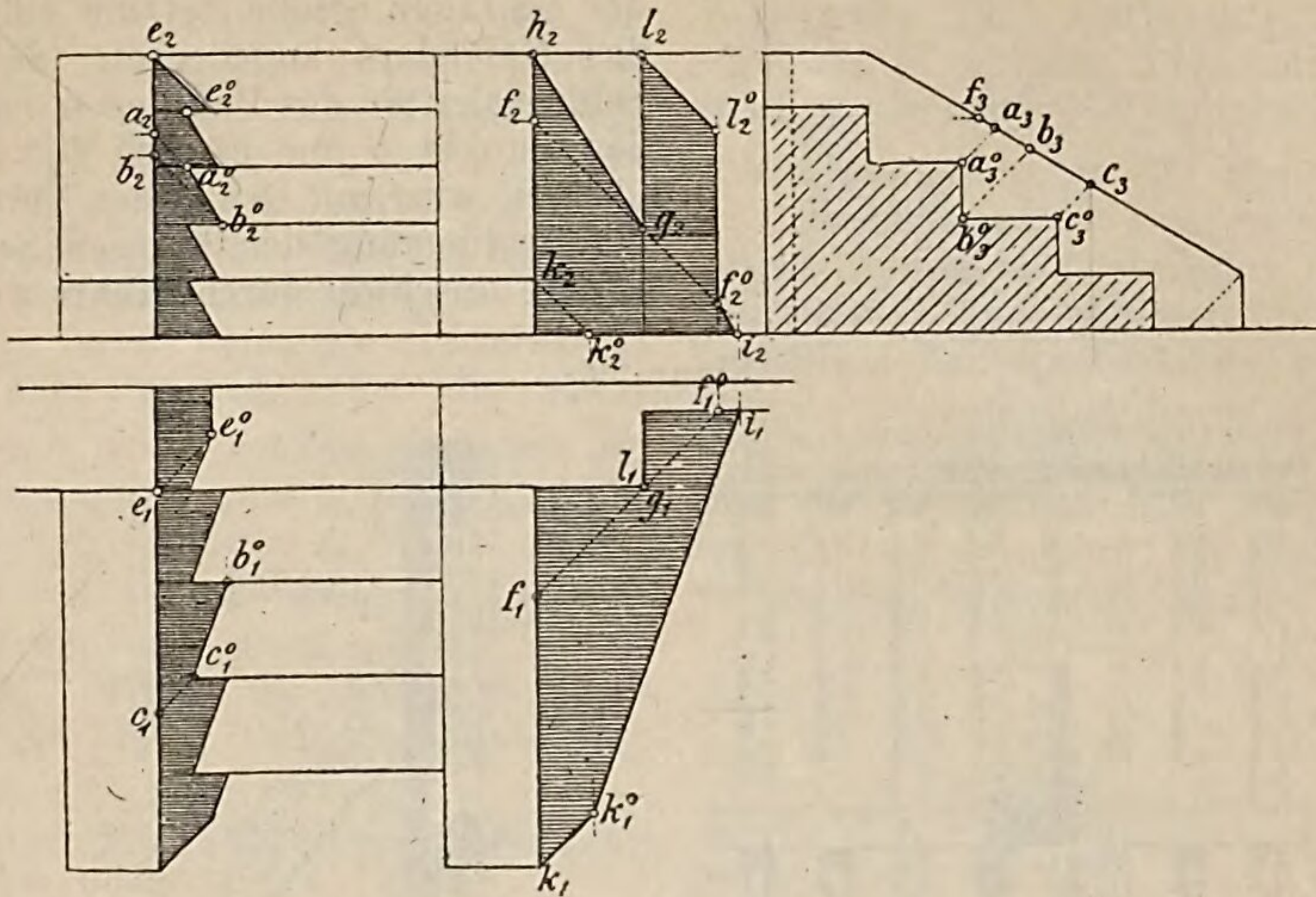
Aufgabe 76. Es ist die Schattenkonstruktion für die in Figur 96 dargestellte Treppe zu zeichnen.

Auflösung. Die Konstruktion des Schlagschattens auf die vertikalen Wände der Treppenstufen ist mittels der Punkte a und b angedeutet. Die Lichtstrahlen durch a_3^0 und b_3^0 bestimmen a_3 , b_3 , woraus sich a_2 und b_2 , sowie a_2^0 und b_2^0 findet. Mittels c_3^0 ergibt sich c_3 und c_1 , hieraus c_1^0 und damit die Schlagschattengrenze $b_1^0 c_1^0$.

Die schiefe Kante kf erzeugt Schatten auf den zur **Pr. Eb.** E_2 parallelen Wänden durch lg und i . Mittels des Lichtstrahles durch g_1 bestimmt sich f_1 und f_1^0 , hieraus f_3 und f_2 und damit auch f_2^0 und g_2 . Die Gerade $h_2 g_2$ gibt den Schlagschatten von hk auf die erstgenannte vertikale Wand. Zieht man $f_2^0 i_2$ parallel zu $h_2 g_2$, so ist hiedurch auch der Schlagschatten von hk auf die vertikale Wand durch i gezeichnet; auf letztere fällt überdies

noch der Schatten $f_2^0 l_2^0$ der Linie gl . Die weitere Konstruktion ist unmittelbar aus der Figur zu entnehmen.

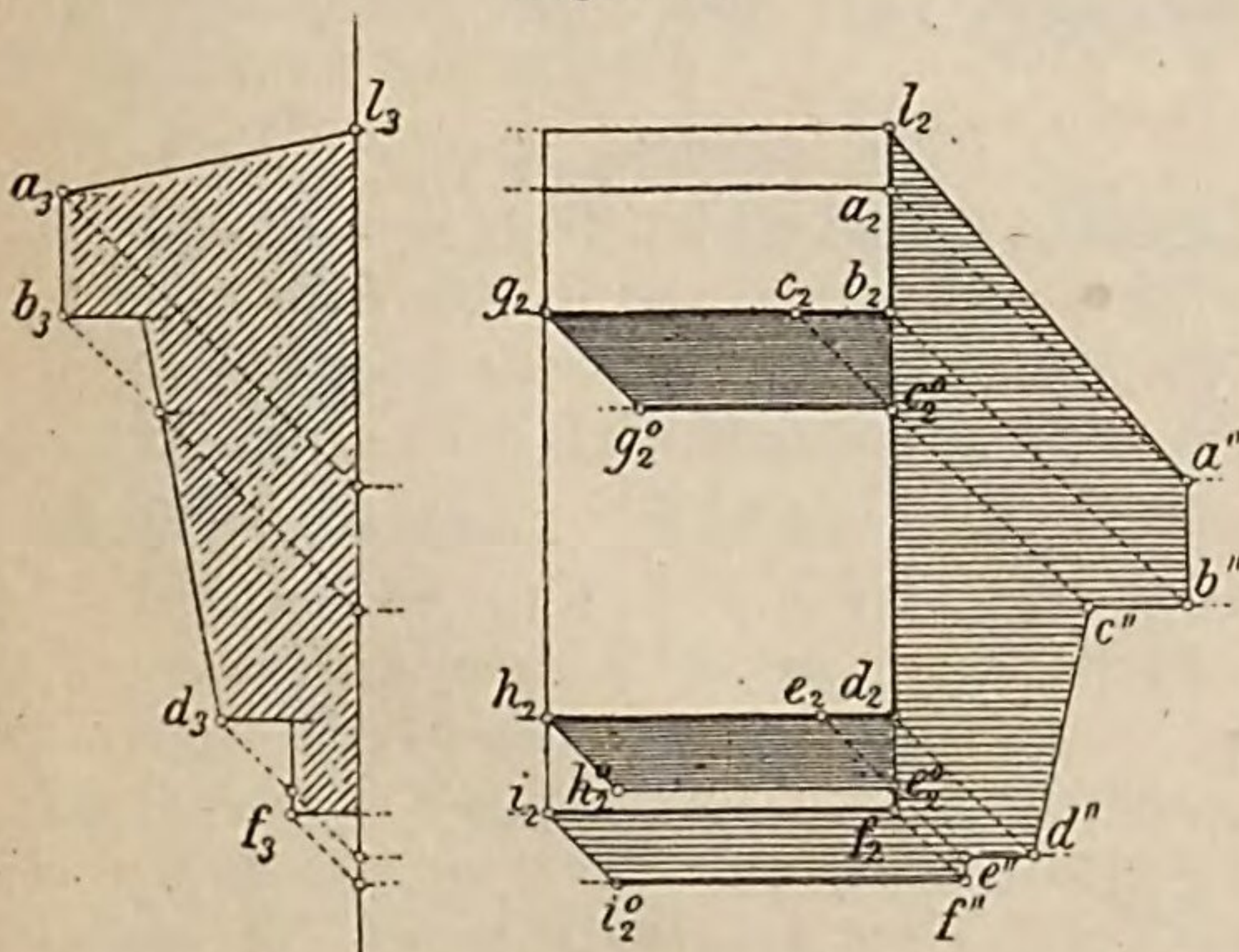
Figur 97.



Anmerkung 32. Häufig, namentlich bei architektonischen Objekten, bedient man sich zur Konstruktion von Schlagschatten anstatt einer ersten oder horizontalen Projektion, einer zweiten vertikalen oder Seitenprojektion in eine Projektionsebene E_3 senkrecht zur X -Achse und stellt den Körper im Projektionssystem II—III dar. Einige Beispiele hierüber sollen auch diese Konstruktionsweise erläutern.

Aufgabe 77. Für den in Figur 98 durch zweite und dritte Projektion dargestellten Kragestein sind die auftretenden Schattengrenzen zu zeichnen.

Figur 98.

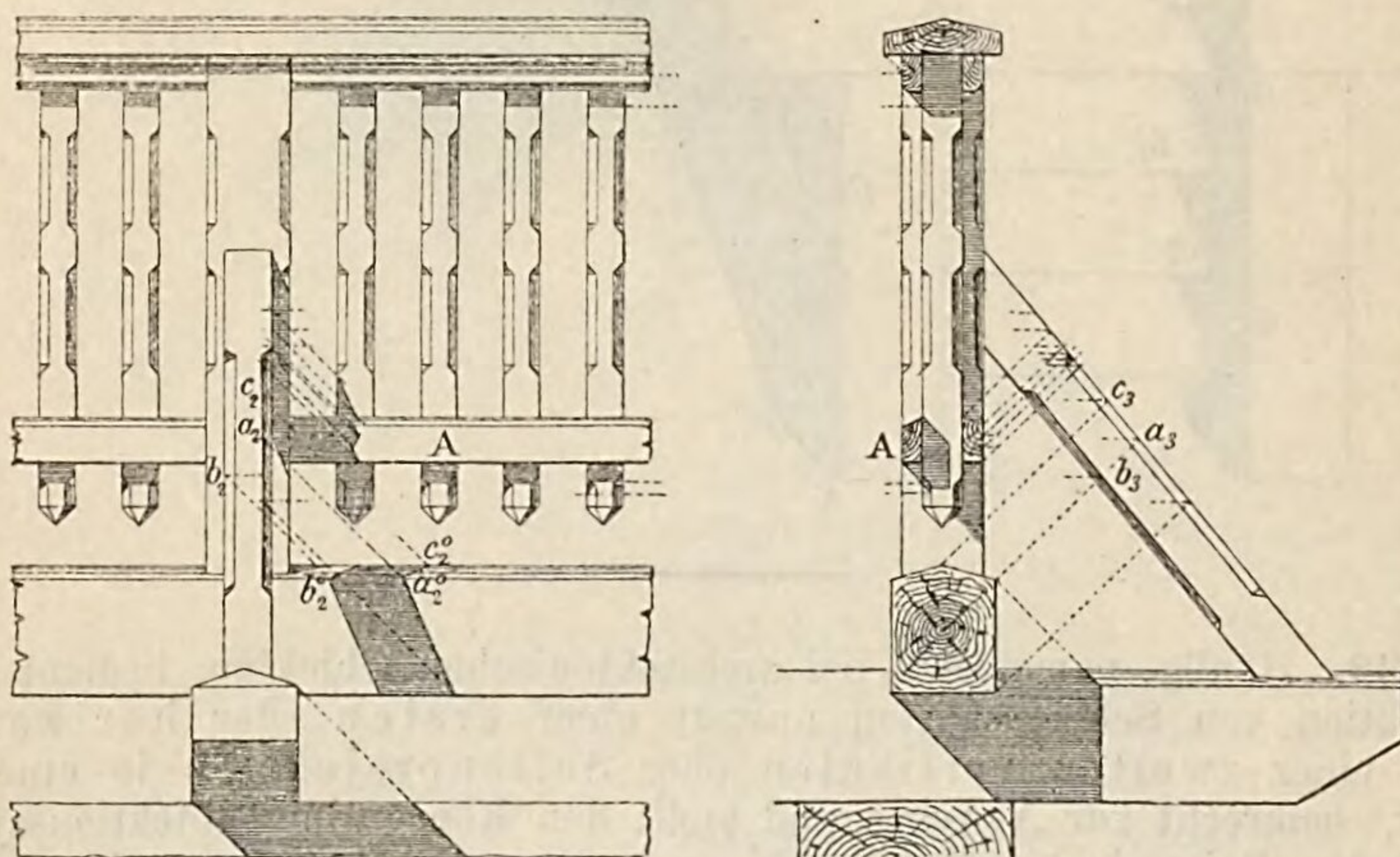


Auflösung. Mittels der dritten Projektion, d. h. des Profils des Körpers, kann man, wie die Figur zeigt, die Schlagschatten der einzelnen Punkte a, b, d, f etc. auf die Schatten auffangende Wand konstruieren und erhält hiedurch in der zweiten Projektion die Punkte a'', b'', d'', f'' Bezüglich des Schlagschattens einzelner Körperkanten auf die Fläche des Körpers selbst ist zu bemerken, dass sowohl von der Kante bg als auch von dh Schatten auf dem Körper entsteht. Die Schlagschatten $g_2^0 c_2^0$ und $h_2^0 e_2^0$ dieser Linien ergeben sich mittels der Lichtstrahlen durch b_3 und d_3 , sowie g_2 und h_2 wie die Figur zeigt. Die Lichtstrahlen durch c_2^0 und e_2^0 treffen überdies auch die Kanten $b_2 g_2$ und $d_2 h_2$ in den Punkten c_2 und e_2 , woraus hervorgeht, dass die Stückchen $b_2 c_2$ und $d_2 e_2$ Schlagschatten auf der rückwärtigen vertikalen Wand erzeugen, und zwar erhält man diesen Schatten in den Parallelen durch b'' und d'' zu den Schatten werfenden Kanten.

Aufgabe 78. Für das in Figur 99 durch zweite und dritte Projektion dargestellte Brückengeländer sind die auftretenden Schattengrenzen zu zeichnen.

Auflösung. In der Figur ist die Konstruktion der Schlagschatten einzelner Punkte der schrägen Strebe auf die einzelnen Balken des Geländers angedeutet. So gelangt der Schlagschatten des Punktes a nach a_2^0 , jener der Punkte b und c nach b_2^0 und c_2^0 . Im übrigen wird auf Grund des Vorangegangenen die Bestimmung der übrigen Schlagschattenpunkte unschwer durchgeführt werden können.

Figur 99.



e) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 79. Man konstruiere für die regulären Körper „Oktaëder, Ikosaëder, Hexaëder, Dodekaëder“ die Selbstschattengrenze, sowie ihren Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 , wenn die Körper

- a) mit einer Seitenfläche in einer **Pr. Eb.** liegen,
- b) mit einem Paar Seitenflächen gegen eine **Pr. Eb.** gleich geneigt sind,
- c) mit einer Hauptdiagonale senkrecht zu einer **Pr. Eb.** stehen.

Aufgabe 80. Man konstruiere die Schlag-
schattengrenze, sowie den Schlagschatten auf
die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 für die in den
Fragen und Antworten 55 bis 63 kennen ge-
lernten archimedischen Körper.

8) Andeutungen zu den Lösungen der ungelösten Aufgaben.

Aufgabe 17. Auflösung a. Da die **Pr. Ebn.** beliebig gewählt werden können, so lege man eine der Begrenzungsflächen, etwa abc , in die **Pr. Eb.** E_1 und stelle die **Pr. Eb.** E_2 senkrecht zur Kante ab . Sind nun l_1 bis l_6 die gegebenen Kantenlängen, so zeichne man mit den Längen l_1 bis l_3 ein Dreieck $a_1b_1c_1$ und betrachte dasselbe als Grundfläche der Pyramide. An die Seiten $\overline{a_1b_1} = l_1$, $\overline{a_1c_1} = l_2$ zeichne man mit den noch übrigen Längen l_4 und l_5 bzw. l_4 und l_6 die Dreiecke a_1b_1s' und a_1c_1s'' und nehme dieselben als die Umlegungen der Dreiecke abs und acs um die Kanten $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ in die **Pr. Eb.** E_1 . Mittels der Punkte s' und s'' bestimmen sich dann, wie bekannt, die Punkte s_1 und s_2 .

Es gibt zwei zur Ebene abs symmetrisch liegende Pyramiden.

Auflösung b. Mittels der Längen l_1 bis l_3 bestimmt sich das Dreieck $a_1b_1c_1$ wie in Auflösung a.

Im **Fall α** sind ausserdem die Längen $\overline{as} = l_4$ und $\overline{bs} = l_5$, sowie der Winkel w_1 der letzteren Kante mit der **Pr. Eb.** E_1 gegeben. Mittels l_5 und w_1 ergibt sich die Länge der Projektion b_1s_1 , sowie der erste Abstand des Punktes s . Durch letztere Strecke ist aber im Verein mit der Länge $\overline{as}$ auch die Länge der Projektion a_1s_1 und damit die Lage des Punktes s_1 bestimmbar.

Im günstigsten Falle sind vier Pyramiden der gesuchten Art möglich.

Im **Fall β** können gegeben sein:

- 1) der Winkel W_1 der Seitenfläche acs mit der Grundfläche, sowie die Längen der beiden in ihr liegenden Seitenkanten $\overline{as}$ und $\overline{cs}$,
- 2) der gleiche Winkel W_1 , die Länge $\overline{as}$ und die Länge $\overline{bs}$ der nicht in der Fläche acs liegenden Seitenkante.

Im ersten Fall bestimmt sich das Dreieck a_1c_1s' wie in Auflösung a; mittels des Winkels W_1 kennt aber auch noch die Entfernung der ersten Projektion s_1 von a_1c_1 , sowie den ersten Abstand von s , da von dem Konstruktionsdreieck des Punktes s die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind.

Zahl der Lösungen höchstens zwei.

Aufgabe 18. Auflösung a bleibt dieselbe wie in Aufgabe 17a, nur sind die Begrenzungsflächen der Pyramide gleichseitig.

Auflösung b bis d. Man zeichnet sich am zweckmässigsten eine regelmässige dreiseitige Pyramide (Tetraeder) von beliebiger Kantenlänge und bestimmt in derselben das Verhältnis der Kantenlänge zu den in der Aufgabe genannten Grössen. Kennt man aber dieses, so lässt sich für die gesuchte Pyramide bei gegebenem R , r oder h der Länge der Kante und damit die Pyramide selbst, wie im Fall a, konstruieren.

Im zweiten Fall kennt man von dem Dreikant a (ac , ab , as) zwei Seitenwinkel, nämlich Winkel $c\hat{a}b$ (vermittels der Längen l_1 bis l_3), sowie Winkel $s\hat{a}b$ (vermittels der Längen l_4 und l_5), ausserdem den dem Seitenwinkel $s\hat{a}b$ gegenüberliegenden Flächenwinkel W_1 . Hiedurch ist aber die Lage der Seitenkante sa gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 und damit auch die Pyramide bestimmt.

Die Zahl der Lösungen beträgt mit Bezugnahme auf Aufgabe 2 und 3, Fall b höchstens vier.

Im **Fall γ** seien gegeben die Längen $\overline{as} = l_4$, $\overline{cs} = l_6$, sowie der Halbmesser R der umbeschriebenen Kugel. Heisst nun m der Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel, ferner μ der Fusspunkt der von m' auf die Seitenfläche acs gefällten Senkrechten, so ergibt sich zunächst durch die bekannten Längen a_1c_1 , $\overline{as}$ und $\overline{cs}$ das Dreieck a_1c_1s' als Umlegung des Dreiecks acs , wodurch auch die Mittelpunkte m_1' und μ' der den Dreiecken $a_1b_1c_1$ und a_1c_1s' umbeschriebenen Kreise konstruierbar sind. m_1' ist zugleich erste Projektion des Mittelpunktes m' . Aus den Längen a_1m_1' und R findet sich der erste Abstand von m' und damit die zweite Projektion m_2' von m' . Bezeichnet ferner m den Halbierpunkt der Seite a_1c_1 , so erhält man durch das rechtwinklige Dreieck $a_2m'\mu_2$, in Rücksicht auf die Gleichheit der Strecken $m\mu' = a_2\mu_2$ die zweite Projektion μ_2 und damit die zweite Projektion der Seitenfläche acs . Hiedurch ist aber der Punkt s_2 und damit auch s_1 bestimmt.

Zahl der möglichen Lösungen vier.

Im **Fall δ** sind wieder zwei Fälle denkbar, entweder kennt man:

- 1) den Winkel zweier Seitenflächen z. B. acs und bcs mit der Grundfläche, sowie die Länge ihrer gemeinsamen Kante cs oder
- 2) die Länge einer der übrigen Kanten, etwa as .

Im **Fall 1** ergibt sich durch die beiden Winkel zunächst die Projektion c_1s_1 der Kante cs der Lage nach, sowie der Neigungswinkel von cs mit der **Pr. Eb.** E_1 , wodurch mittels der bekannten Länge cs auch die Länge c_1s_1 und damit sowohl s_1 als s_2 bestimmt ist.

Im **Fall 2** kennt man die Lage der Kante cs und damit auch die ihrer Projektionen wie

im Fall 1. Mittels des Winkels der Ebene acs mit der **Pr. Eb.** lässt sich erstere nun in letztere umlegen, wodurch sich die Umlegung cs und infolge der bekannten Länge $\overline{cs}$ auch jene von s in s' ergibt.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Im **Fall ε** seien gegeben die Länge von $\overline{as}$, R und die Höhe h .

Durch letztere Grösse gewinnt man für die zweite Projektion der Pyramide einen geometrischen Ort in der im Abstände h von der X -Achse zu letzterer gezogenen Parallelen. Für die erste Projektion s_1 bestimmen sich als geometrische Oerter zwei Kreise mit den Mittelpunkten a_1 und m_1' ($m_1' =$ Mittelpunkt des dem Dreieck $a_1b_1c_1$ umschriebenen Kreises) und den Halbmessern gleich den zweiten Katheten von rechtwinkligen Dreiecken mit den Hypotenusen gleich $\overline{as}$ bzw. R , und den anderen Katheten gleich h bzw. gleich h weniger dem ersten Abstände des Mittelpunktes m_1' ; letztere Länge ist gleichfalls als Kathete in einem rechtwinkligen Dreiecke mit der Hypotenuse R und der Kathete gleich m_1a_1 enthalten.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Fall ζ . In der Aufgabe sollte es heissen: Gegeben die Winkel zweier Seitenkanten nicht Seitenflächen.

Es sind wieder zwei Fälle denkbar, entweder kennt man

- 1) die Länge $\overline{as}$, sowie die Winkel w_1 und w_1' von as und bs , oder
- 2) die Länge $\overline{as}$, sowie die Winkel w_1' und w_1'' von bs und cs .

Im ersten Fall erhält man für die erste Projektion zwei geometrische Oerter, nämlich zwei Kreise, deren einer den Punkt a_2 als Mittelpunkt und den aus $\overline{as}$ und dem Winkel w_1 bestimmbaren Halbmesser hat, während der andere Kreis über der Verbindungslinie der die Strecke $\overline{a_1b_1}$ nach dem Verhältnis $\frac{\text{ctg } w_1}{\text{ctg } w_1'}$ teilenden Punkte als Durchmesser beschrieben ist, siehe Erkl. 36.

Im zweiten Fall ist die Aufgabe gleichbedeutend mit der Aufgabe 13 c.

In beiden Fällen beträgt die Zahl der Lösungen höchstens vier.

Fall η . Durch die drei Winkel sind die Seitenflächen ihrer Lage nach gegeben und ist hiedurch die Pyramide bestimmt.

Zahl der Lösung zwei.

Fall ϑ . Die Lösung bleibt dieselbe wie im **Fall ε** , wenn man mittels des gegebenen Winkels

und der Höhe die Länge der bezüglichen Seitenkante ermittelt.

Zahl der Lösungen vier.

Fall ϵ . Für den Fall der Winkel W_1 der Seitenfläche bcs mit der Grundfläche gegeben ist, erhält man für die Projektion s_1 der Pyramidenspitze als geometrischen Ort eine Parallele zu b_1c_1 in einem Abstände von letzterer Linie gleich der anliegenden Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Höhe h als anderen Kathete und dem gegenüberliegenden Winkel W_1 . Im übrigen bleibt die Lösung, wie im Fall ϵ .

Zahl der Lösungen vier.

Aufgabe 19. Auflösung a. Heisst $abcd$ die gegebene Grundfläche, so nehme man, wenn etwa im

Fall α der Winkel der Seitenfläche ads mit der Grundfläche gegeben sein soll, die **Pr. Eb.** E_2 senkrecht zur Kante ad an und lege nun die gegebene Seitenfläche abs nach a_1b_1s' in die **Pr. Eb.** E_1 . Die durch s' senkrecht zu ab gelegte Ebene schneidet die Ebene ads nach einer den Punkt s enthaltenden Geraden, welche letzterer noch überdies auch einem in der erst genannten Ebene liegenden Kreise mit dem Mittelpunkt s' (s' liegt auf a_1b_1) und $s's'$ als Halbmesser angehört.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Im **Fall β** bestimmt man mittels des Winkels und der Länge der gegebenen Seitenkante die Länge der bezüglichen ersten Projektion und gewinnt hiemit zwei geometrische Oerter für die erste Projektion s_1 der Pyramidenspitze, nämlich einen Kreis mit dem Mittelpunkt a_1 oder b_1 und dem Halbmesser a_1s_1 oder b_1s_1 , sowie der Senkrechten durch s' zu a_1b_1 .

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Im **Fall γ** erhält man keine strenge geometrische Konstruktion für die Pyramidenspitze, weil die Lösung auf den Schnitt einer Kreislinie mit einem senkrechten Kreiskegel führt. Eine hinlänglich genaue graphische Lösung ist die folgende.

Sei etwa der Winkel w_1 der Seitenkante ds gegeben, so erhält man zunächst infolge der gegebenen Seitenfläche abs einen geometrischen Ort für die Pyramidenspitze in jener Kreislinie, welche der Punkt s bei der Drehung der Seitenfläche abs um die Kante a_1b_1 beschreibt. Die zweite Projektion dieser Kreislinie ist ein Kreis K_2 mit dem Mittelpunkt a_2

Aufgabe 20. Man legt in allen Fällen eine der Seitenflächen etwa die Seitenfläche abs in die **Pr. Eb.** E_1 , analog wie in Aufgabe 11, zweiter Konstruktionsfall, so bestimmt sich in

Auflösung a mittels der gegebenen Seitenflächen und ihres Winkels zunächst der Punkt c und damit auch die Lage der Grundfläche gegen die gegebenen Seitenflächen.

Im **Fall α** hat man dann nur noch durch die Kanten sc und sa Ebenen unter den gegebenen Winkeln zur Grundfläche geneigt zu legen, so ergeben sich in deren Schnittlinien mit letzterer die noch fehlenden Grundkanten cd und ad der Pyramide.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Im **Fall β** gewinnt man mittels des gegebenen Winkels entweder die Lage von ad oder von cd in der Grundfläche. Denkt man sich ferner durch s eine Senkrechte zur Grundflächenebene gezogen, so ist mittels der Länge von ds auch die Entfernung des Fusspunktes der eben genannten Senkrechten von d und damit ein zweiter Ort für den Punkt d bestimmt.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Im **Fall γ** ist gleichfalls die Länge ds als bekannt vorausgesetzt. Mittels des gegebenen Verhältnisses ist ein zweiter Ort in der zu diesem Verhältnis gehörigen Kreislinie, siehe Erkl. 36, gegeben.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Auflösung b. Denkt man sich vom Punkte s eine senkrechte Ebene zur Grundkante ab gelegt, so schneidet diese die Grundfläche nach einer Geraden, welche im Verein mit der durch s zur Grundfläche gefällten Senkrechten (Höhe der Pyramide) ein rechtwinkliges Dreieck bildet, von dem, da die Pyramidenhöhe gegeben ist, Hypotenuse und eine

und dem Halbmesser gleich $s_2 \hat{s}$. Zieht man nun durch d_1 eine Reihe von Geraden, z. B. $d_1 d_1$, welche die Gerade $s' s_1$ in Punkten d_1 etc. schneiden, und bestimmt die zugehörige zweite Projektion d_2 , so dass die ersten Abstände gleich der zweiten Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks sind mit $\overline{d_1 d_1}$ als anderen Kathete und W_1 als anliegenden Winkel, so befinden sich die Punkte d_2 auf einer Kurve, welche den Kreis K_2 in höchstens zwei Punkten, den zweiten Projektionen der möglichen Pyramidenspitzen trifft.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Im **Fall δ** sind zwei Möglichkeiten denkbar; entweder ist nämlich der Winkel der Seitenfläche abs mit einer benachbarten oder mit einer gegenüberliegenden Seitenfläche gegeben. In beiden Fällen führt die Lösung auf ein Dreikant, von dem man zwei Seitenwinkel und den dem einen Seitenwinkel gegenüberliegenden Flächenwinkel kennt, siehe auch Aufgabe 2 und 3, Fall b.

Im **Fall ϵ** bestimmt sich mittels der Höhe und der Umlegung s' das Konstruktionsdreieck des Punktes s , und damit die erste, sowie zweite Projektion der Pyramidenspitze.

Zahl der Lösungen zwei.

Auflösung b. Mittels des gegebenen Winkels ist zunächst die Lage der Ebene abs gegen die Grundfläche festgelegt; eine Parallele zur X -Achse im Abstände h von X liefert die zweite Projektion s_2 von s ; auf der Projizierenden durch s_2 liegt s_1 .

Im **Fall α** gewinnt man nun durch die gegebene Länge cs im Verein mit h die Länge $c_1 s_1$ und damit einen zweiten geometrischen Ort für s_1 in dem Kreise um c_1 als Mittelpunkt und $c_1 s_1$ als Halbmesser.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Im **Fall β** bleibt die Lösung wie im Fall α , nur bestimmt sich die Länge $c_1 s_1$ aus h und dem Winkel w_1 von cs mit der Grundfläche.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Im **Fall γ** besteht der zweite geometrische Ort für s in der Schnittlinie der beiden Seitenflächen, deren Winkel gegeben ist.

Ist also z. B. der Winkel W der Seitenflächen abs und $c ds$ gegeben, so hat man nur durch cd eine Ebene unter dem Winkel W gegen Ebene abs geneigt zu legen und deren Schnittlinie mit letzterer zu bestimmen.

Zahl der Lösungen höchstens zwei.

Auflösung c. Durch die gegebenen Winkel bestimmt sich die Schnittlinie der betreffenden Seitenflächen und damit ein geometrischer

Kathete bekannt sind. Durch die gegebene Höhe ist also der Winkel der Grundfläche mit der Ebene abs , d. h. die Lage der ersteren gegen die letztere und im Anschluss hieran auch die Lage der Grundkante cb in der Grundfläche bestimmt.

Im **Fall α** hat man nun nur noch durch die Kanten as und cs Ebenen unter den gegebenen Winkeln zu den Ebenen abs und bcs geneigt zu legen, so liefern diese durch ihre Schnittlinien mit der Grundfläche die Grundkanten ad und cd .

Im **Fall β** legt man durch die Kanten as und cs Ebenen unter den gegebenen Winkeln gegen die Ebene abs bzw. der Grundfläche geneigt, so sind hiedurch wieder die Grundkanten ad und cd bestimmt.

Auflösung c. Es seien die Seitenflächen abs und $c ds$ gegeben.

In den **Fällen α und β** bestimmt sich mittels der gegebenen Höhe und der Länge cs bzw. des gegebenen Winkels von cs mit der Grundfläche ganz so wie in der vorigen Aufgabe der Winkel der Grundfläche mit der Ebene abs ; im Falle γ ist dieser Winkel gegeben.

Kennt man nun die Lage der Grundfläche, so hat man nur durch die Kante as oder bs eine Ebene unter dem gegebenen Winkel zu der Grundfläche geneigt zu legen, so ist hiedurch die Lage der Grundkante ad oder bc und hiedurch auch die Lage des Punktes d oder c bestimmt und es kann nun die Ebene scd um ihre erste Spur in die **Pr. Eb. E_1** umgelegt und das Dreieck scd in wahrer Gestalt gezeichnet werden, woraus sich schliesslich die Projektionen der noch fehlenden Ecke c oder d konstruieren lassen.

Auflösung d. Seien etwa gegeben die Seitenflächen abs , ads und bcs , so ergibt sich

im **Fall α** mittels der Höhe wie früher der Winkel der Grundfläche mit Ebene abs . Durch die beiden übrigen gegebenen Seitenflächen bestimmen sich nun die Lage der Grundkanten bc und ad (Dreikant $b[ba, bc, bs]$ und $a[ab, ad, es]$ nach dem dritten Dreikantsfall, siehe Aufgabe 2 und 3, konstruierbar) und damit auch die Lage der Punkte c und d .

In den Fällen β , γ , δ ermittelt man aus den gegebenen Stücken unmittelbar die Höhe der Pyramide, alles Weitere wie im Fall α .

Im Falle β ist der Winkel einer der gegebenen Seitenflächen mit der Grundfläche, im Falle γ der Winkel einer der gegebenen Seitenkanten bekannt.

Ort für die Pyramidenspitze. Im Uebrigen bleibt in den Fällen α , β und γ die Lösung wie in Auflösung b, α und β .

Im **Fall δ** hat man, wenn etwa das Verhältnis $\frac{m}{n}$ der Seitenkanten $\overline{cs}$ und $\overline{ds}$ gegeben ist, die Strecke $\overline{cd}$ in den Punkten p und q in dem gegebenen Verhältnis zu teilen und erhält hiedurch in der über $\overline{pq}$ als Durchmesser beschriebenen Kugel einen zweiten geometrischen Ort für die Pyramidenspitze.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Auflösung d. Durch die drei gegebenen Winkel ist die Lage der betreffenden Seitenfläche zur Grundfläche gegeben. Die Schnittlinien aufeinanderfolgender Seitenflächen bestimmen die Pyramidenspitze.

Aufgabe 23. Auflösung. Man verfähre in der gleichen Weise, wie in den bezüglichen Fällen der Aufgabe 21 und 22 angegeben wurde.

Aufgabe 24. Auflösung a. Man lege eine der gegebenen Seitenflächen etwa $abab$ in die **Pr. Eb.** E_1 , so ergibt sich

im **Fall α** mittels des Winkels W' sowohl die Lage der Ebene $adad$ gegen die Ebene $abab$ als auch jene der beiden Grundflächenebenen zu einander. Da ausserdem die Winkel W'' und W''' der Seitenflächen $bbcc$ und $ddcc$ gegeben sind, so lassen sich durch die Kanten bb und dd Ebenen unter den genannten Winkeln zu den Ebenen $abab$ und $adad$ geneigt legen, wodurch die noch fehlenden Prismenkanten ihrer Lage nach bestimmt sind.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Im **Fall β** gewinnt man mittels des Winkels W' die Lage der Grundflächenebenen zu der Seitenfläche $abab$ wie im Fall α . Legt man nun durch die Kante dd eine Ebene unter dem Winkel W gegen die gegebene Seitenfläche $abab$ geneigt, so ist hiedurch die Lage der beiden Grundkanten dc und $\overline{dc}$ bestimmt und da ausserdem die Länge $\overline{cc}$ bekannt ist, so hat man nur in der Ebene $ddcc$ die Gerade cc parallel zu dd so zu zeichnen, dass das zwischen die Grundkanten dc und $\overline{dc}$ fallende Stück eine gegebene Länge gleich $\overline{cc}$ habe.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Im **Fall γ** . Legt man durch die Gerade ab eine Ebene unter dem Winkel w_1 gegen die Kante aa geneigt, so ist hiedurch die Lage der Grundflächenebene $abcd$ gegen die Seitenkanten bestimmt; da nun ausserdem die Seitenfläche $adad$ gegeben ist, so lässt sich jetzt

auch deren Neigung gegen die gegebene Seitenfläche $abab$ festlegen, wodurch sich die Lage der Grundkanten ad und ad ergibt.

Man braucht nunmehr nur noch durch die Kanten dd und bb Ebenen zu legen, welche gegen die Seitenfläche $abab$ die gegebenen Neigungen besitzen, so bestimmen sich hiedurch die noch fehlenden Kanten dc und bc .

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Auflösung b. Denkt man sich die Seitenflächen $abab$ und $dcdd$ erweitert, so treffen sie sich nach einer zur Seitenkantenrichtung parallelen Geraden ee und man kennt nun von dem Prisma $bceebc$ die Winkel der drei Seitenflächen sowie die Längen der Seitenkanten bb und cc , endlich noch die Winkel der Seitenkante ee mit den Grundkanten ab , ab , dc , dc . Genanntes Prisma lässt sich nun mittels eines ihm ähnlichen Prismas leicht wie folgt herstellen:

Man nehme die **Pr. Eb.** E_1 senkrecht zur Prismenrichtung an, so erhält man als erste Projektion eines dem gesuchten Prisma ähnlichen Prismas ein Dreieck $b_1'd_1'e_1'$ mit den Winkeln W''' und W'''' bei b_1' und d_1' . Die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seitenflächen sind Trapeze, von welchen man den Abstand der parallelen Seiten gleich den Strecken $b_1'e_1'$ und $d_1'e_1'$, ausserdem die Winkel der nicht parallelen Seiten mit den parallelen kennt. Man kann demnach die Trapeze $b'b'e'e'$, $d'e'd'e'$ und damit auch das Trapez $b'b'd'd'$ konstruieren, wodurch das Netz und damit auch die Projektion des Prismas bestimmt ist. Hat man aber dieses Prisma hergestellt, so braucht man ja nur eine der gegebenen Seitenflächen, etwa die Fläche $abab$ so in die Seitenfläche $a'b'a'b'$ einzutragen, dass die Seiten ab und $a'b'$, ebenso bc und $b'c'$ aufeinanderfallen und Punkt b' mit b sich deckt, durch b eine Parallele zu $b'c'$ ziehen und zwischen die Linien bc und $b'c'$ eine Strecke parallel zu bb von gegebener Länge (gleich cc) einzutragen, so ergeben sich hiedurch die Punkte c und c und hiemit die Ebenen beider Grundflächen des gesuchten Prismas. Die Parallelebene durch cc zur Ebene $c'e'e'c'$ bestimmt die Seitenfläche $ccdd$ der Lage nach und da ihre wahre Gestalt gegeben ist, so lässt sich auch ihre Projektion ermitteln.

Zahl der Lösungen zwei.

Auflösung c. Ist $abcdabcd$ das gesuchte Prisma, von welchem man die Seitenflächen $abab$, $adad$ und $bcbcb$ kennt, so denke man sich die beiden letztgenannten Seitenflächen bis zu ihrem Schnitt ee verlängert,

so entsteht ein dreiseitiges Prisma $abeabe$, dessen Netz aus den Trapezen $a_1b_1a_1b_1$, Seitenfläche $abab$ in der **Pr. Eb. E_1** liegend vorausgesetzt, $a_1a_1e'e'$ und $b_1b_1c''c''$ besteht, so dass die Figur $e'e'e''e''$ ein Rechteck ist, dessen Seiten bezw. parallel und senkrecht zur Seitenkante a_1a_1 gerichtet sind. Verlängert man nun die Seiten b_1e'' und b_1e'' bis ihrem zu Schnittpunkt g , ebenso b_1e'' und a_1e' bis zu ihrem Schnittpunkt f , nimmt die Punkte g und f als aufeinanderfolgende Ecken eines Vierecks an, dessen Seiten mit den Linien b_1e'' , a_1e' und b_1e'' zusammenfallen und dessen Diagonalen parallel bezw. senkrecht zur Prismenrichtung laufen, so erhält man hiedurch die fehlenden Ecken h und i genannten Vierecks auf den Linien b_1e'' und a_1e' so, dass fh parallel und gi senkrecht zu a_1a_1 gerichtet ist. Die vierte Seite hi des Vierecks geht dann durch den Punkt e' , der vierten Ecke des Rechtecks $e'e'e''e''$.

Mittels der gegebenen Stücke ist aber das Viereck $fghi$ konstruierbar, denn legt man an die gegebene Seitenfläche $a_1b_1b_1a_1$ die Seitenflächen $aadd$ und $bbcc$ nach $a_1a_1d'd'$ und $b_1b_1c''c''$ an, so erhält man im Schnitt von a_1d' und b_1c'' den Punkt f , im Schnitt von b_1c'' und b_1c'' den Punkt g . Die Parallele durch f zu a_1a_1 bzw. die Senkrechte durch g zu a_1a_1 liefert auf b_1e'' bzw. auf a_1d' den Punkt h bzw. i , die Linie hi schneidet aber die Gerade a_1d' im Punkte e' , wodurch das Rechteck $e'e'e''e''$ und damit das Netz des Prismas $abeabe$ gegeben ist.

Zahl der Lösungen zwei.

Aufgabe 25. Auflösung a. Nimmt man die **Pr. Eb. E_1** senkrecht zur Prismenrichtung an, so ist die erste Projektion des Prismas ein gleichseitiges Dreieck und letzteres ist zugleich die Projektion der gegebenen Grundfläche. Die Lage der Grundfläche gegen die **Pr. Eb. E_1** bzw. gegen die zur **Pr. Eb. E_1** senkrechte Prismenrichtung lässt sich nun mit Bezugnahme auf Aufgabe 119, I. Teil, ermitteln.

Die Aufgabe ist unbestimmt gelassen; will man auch die Lage der zweiten Grundfläche feststellen, so sind noch die Längen der drei Seitenkanten zu geben.

Zahl der Lösungen zwei.

Auflösung b. Die Aufgabe stimmt mit der in 24b gelösten überein.

Aufgabe 26. In allen Fällen a bis e verschafft man sich zweckmässig die zweite Gegenachse $\mathfrak{R}$, indem man auf der Senkrechten durch das Collineationscentrum s zur Collineationsachse S in der Richtung ss_0 die Strecke $sr_0 = q_0s_0$ abträgt, vergleiche Figur 40. Im weiteren ist die Lösung wie in der Antwort der Frage 19.

Auflösung a. Man erhält als collineare Figur ein im Endlichen befindliches, geschlossenes Viereck $abcd$, wie in Figur 40.

Auflösung b. Soll die Quadratecke d auf Q fallen, so rückt der dem Punkte d entsprechende Punkt δ in unendliche Ferne und man erhält ein nach einer Seite hin offenes, sich ins Unendliche erstreckendes Viereck.

Auflösung c. Schneiden etwa die Quadratseiten ad und cd die Gegenachse Q in den

Punkten q und q' , so entsprechen denselben zwei unendlich ferne Punkte q und q' . Dem Quadrat $abcd$ entspricht nun ein Viereck $abcd$, dessen Ecken im Endlichen sich befinden, von welchen aber nicht die endlichen Strecken $\overline{ad}$ und $\overline{bc}$ als Vierecksseiten, sondern die unendlichen Teile dieser Strecken als solche zu gelten haben. Man erhält somit eine von den Linien ab und cd sich nach entgegengesetzter Richtung ins Unendliche erstreckende Figur.

Auflösung d. Liegt etwa die Seite ad auf der Gegenachse Q , so fällt die der Seite ad entsprechende Seite $\overline{ad}$ in unendliche Ferne und man erhält ein Viereck $abcd$ mit zweien unendlich fernen Ecken, d. h. ein Viereck mit zweien unendlich langen Seiten und einer ganz im Unendlichen befindlichen Seite.

Auflösung e. Fällt etwa die Diagonale ac mit der Gegenachse Q zusammen, so erhält man als Collinearfigur ein Viereck mit einer im Unendlichen befindlichen Diagonale und unendlich langen Seiten.

Aufgabe 27. Auflösung. Soll die centrisch-collineare Figur eines Vierecks $abcd$ ein Quadrat $abcd$ werden, so müssen den Schnittpunkten q und q' der Gegenseiten ad , bc und ab , cd unendlich ferne Punkte q und q' entsprechen, d. h. es muss die Gegenachse Q mit der Verbindungslinie qq' zusammenfallen. Ausserdem müssen aber auch die Verbindungslinien der Punkte q und q' mit dem Collineationscentrum aufeinander senkrecht stehen, woraus folgt, dass letzteres auf einem Kreise über der Strecke $\overline{qq'}$ als Durchmesser sich befinden muss. Heissen ferner die Schnittpunkte der Diagonalen ac und bd mit Q v und v' , so entsprechen auch den Punkten v und v' unendlich ferne Punkte, d. h. die den Vierecksdiagonalen ac und bd entsprechenden Quadratdiagonalen laufen zu den Verbindungslinien sv und sv' parallel und da erstere auf einander senkrecht stehen, so liegt das Collineationscentrum s auf einem zweiten Kreise über der Strecke $\overline{vv'}$ als Durchmesser.

Das Collineationscentrum s ist somit der Schnittpunkt der beiden Kreise. Ist nun etwa l die Länge der Quadratseite, so findet man die Collineationsachse, indem man die Strecke l von s aus etwa auf

Aufgabe 28. Auflösung. Den Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ entsprechen centrisch-collinear drei Gerade A , B und C , gehend durch die Punkte a , b , c , sowie durch die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mit der Collineationsachse S , daher entsprechen auch den Schnittpunkten a' , b' , c' der Geraden $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Schnittpunkte a' , b' , c' der Geraden B , C , A , C und A , B . Die Verbindungslinien $a'a'$, $b'b'$, $c'c'$ liefern somit das Collineationscentrum s .

der Verbindungslinie sq' nach sw abträgt, durch w eine Parallele zu sq bis zum Schnitt x mit Q und durch x eine weitere Parallele xy zu qa bis zum Schnitt mit der Linie qb zieht, so geht durch y parallel zu Q die Collineationsachse S .

Aufgabe 29. Auflösung. Zieht man die Verbindungslinien sa' , sb' und sc' , so schneiden diese auf den Dreiecksseiten bc , ac und ab die Punkte a' , b' , c' aus. Die Geraden $a'b'$, $a'c'$ und $b'c'$ liefern durch ihre Schnittpunkte mit den entsprechenden Geraden $a'b'$, $a'c'$ und $b'c'$ Punkte der Collineationsachse S .

Aufgabe 30. Auflösung. Man konstruiere die centrisch-collineare Figur des Kreises nach Massgabe des in der Antwort der Frage 19 angegebenen Verfahrens, indem man auf dem Kreise eine Reihe von Punkten beliebig wählt und die ihnen entsprechenden Punkte der centrisch-collinearen Figur ermittelt. Zweckmässig ist es, entweder im Kreise eine Reihe von parallelen Sehnen zu ziehen, deren Schnittpunkte mit der Collineationsachse günstig gelegen sind; die entsprechenden Geraden schneiden sich sämtlich in einem Punkte der Gegenachse R ; oder man verbindet einen entsprechend auf Q gewählten Punkte mit einer Reihe von Kreispunkten, dann entsprechen diesen Linien eine Reihe von parallelen Sehnen der Collinearfigur.

Man versuche die centrisch-collineare Figur des Kreises zu zeichnen, wenn derselbe mit der Gegenachse Q

- a) keinen Punkt gemein hat,
- b) sie berührt,
- c) sie in zweien Punkten schneidet.

Aufgabe 31. Auflösung. Man trage zunächst auf dreien nicht aufeinanderfolgenden Kanten drei gleiche Strecken sa' , sc' und se' von beliebiger Grösse ab, so schneidet die Ebene $a'c'e'$ aus der Pyramide ein Sechseck $a'b'c'd'e'f'$ mit dem Flächeninhalte f' aus, ähnlich dem gesuchten Seckseck $abcdef$ mit dem gegebenen Flächeninhalte f .

Nach einem Satze der Planimetrie verhalten sich aber die Inhalte ähnlicher Figuren wie die Quadrate entsprechender Seiten; letzteres Verhältnis ist aber gleich dem Verhältnis der Quadrate der Entfernungen der Durchschnittspunkte von parallelen Sechsecksseiten mit einer Pyramidenkante von der Spitze der Pyramide, d. h. es ist $\frac{f'^2}{f^2} = \frac{\overline{a'b'}^2}{\overline{ab}^2} = \frac{\overline{sa'}^2}{\overline{sa}^2}$. Da in eben genannter Verhältnisgleichheit drei Grössen, nämlich f'^2 , f^2 und $\overline{sa'}^2$ bekannt sind, so erhält man die vierte Grösse als vierte geometrische Proportionale zwischen den drei gegebenen

Aufgabe 32. Infolge der gegebenen Grundfläche $abcdef$ kennt man auch die erste Projektion der Pyramide (Grundfläche mit der **Pr. Eb.** zusammenfallend vorausgesetzt). Ist der Winkel W von zweien aufeinanderfolgenden Seitenflächen abs und bcs gegeben, so zeichne man über der Linie a_1c_1 als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck a_1c_1e' mit dem Winkel W an der Spitze. Denkt man sich nun die beiden Seitenflächen abs und bcs um die Kanten a_1b_1 und b_1c_1 in die **Pr. Eb.** E_1 umgelegt, so findet man die Umlegungen b_1s' und b_1s'' als Tangenten an die um die Mittelpunkte a_1 und c_1 mit den bezw. Halbmessern gleich $\overline{a_1e'}$ und $\overline{c_1e'}$ beschriebenen Kreise. Hiemit ist aber auch die Umlegung s' oder s'' der Pyramidenspitze bestimmt, woraus sich mittels des Konstruktionsdreiecks des Punktes s auch der erste Abstand dieses Punktes ergibt. Man verschafft sich nunmehr den Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel und führt die schneidende Ebene, wie in der Aufgabe verlangt ist.

Größen. Man drückt die Flächeninhalte der Sechsecke $\alpha' \dots$ und $\alpha \dots$ durch Quadrate mit den Seiten l' und l aus und erhält dann die Gleichheit: $\frac{l'^2}{l^2} = \frac{s \alpha'^2}{s \alpha^2}$ oder $\frac{l'}{l} = \frac{s \alpha'}{s \alpha}$

Vergl. auch Aufgabe 126, I. Teil.

Aufgabe 33. Auflösung. Neigungswinkel w_1 und Höhe h bestimmen die Länge der ersten Projektion der zum Winkel w_1 gehörigen Seitenkante und damit einen geometrischen Ort für die Projektion s_1 der Pyramidenspitze s . Aus dem Halbmesser R der umbeschriebenen Kugel in Verbindung mit dem Halbmesser des dem Grundflächensechseck umbeschriebenen Kreises, ergibt sich der erste Abstand h_1 des Mittelpunktes m' der umbeschriebenen Kugel und hiedurch ein zweiter geometrischer Ort für s_1 in dem Kreise mit m_1' als Mittelpunkt und einem Halbmesser gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit R als Hypotenuse und der Strecke $h-h_1$ als zweiten Kathete. Ist die Pyramide dargestellt, so verschafft man sich zunächst eine Parallelebene zur gesuchten durch Abtragen dreier Längen m , n und p von der Pyramidenspitze aus auf dreien nicht aufeinanderfolgenden Pyramidenkanten und führt hierauf eine Parallelebene zur ersteren durch den Mittelpunkt m' .

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Aufgabe 35. Auflösung. Die eine der gegebenen Seitenflächen etwa abc lege man in die **Pr. Eb. E_1** , so lässt sich mittels des gegebenen Halbmessers R und der Entfernung des Mittelpunktes m_1 des dem Dreieck $a_1 b_1 c_1$ umbeschriebenen Kreises von einer Ecke dieses Dreiecks zunächst der erste Abstand des Punktes m' und damit die zweite Projektion dieses Punktes bestimmen. In ähnlicher Weise findet sich mittels der zweiten gegebenen Seitenfläche abc deren Abstand von m' und man hat daher, um die Lage der Seitenfläche abs zu erhalten nur durch die Kante ab eine Ebene zu legen, welche von m' diesen Abstand besitzt.

Aufgabe 37. Auflösung a. Denkt man sich das Prisma, welches der Einfachheit halber als ein vierseitiges mit den Grundflächen $abcd$ und $abcd$ angenommen sein soll, so konstruiert,

Aufgabe 34. Auflösung. Die gesuchte Ebene läuft parallel zu den Schnittlinien nicht aufeinanderfolgender Seitenflächen der Pyramide. Schneidet man nun die Pyramide durch eine Parallelebene zur gesuchten nach einem Parallelogramme $\alpha' b' c' d'$ mit dem Flächeninhalt f' , so findet man wieder mittels der Verhältnissgleichheiten

$$\frac{l'^2}{l^2} = \frac{s \alpha'^2}{s \alpha^2} \text{ oder } \frac{l'}{l} = \frac{s \alpha'}{s \alpha} \text{ einen Punkt } \alpha$$

auf der Pyramidenkante sa , durch welchen die gesuchte Ebene hindurchgeht.

Aufgabe 36. Auflösung. Man lege die gegebene Grundfläche $abcde$ in die **Pr. Eb. E_1** und an die Kanten ab und ae die gegebenen Seitenflächen nach $a_1 b_1 \alpha' b'$ und $a_1 d_1 \alpha'' e''$ an, wobei die Gleichheit der Strecken $a_1 \alpha'$ und $a_1 \alpha''$ zu berücksichtigen ist. Aus den Punkten α' und α'' gewinnt man a_1 , wodurch auch b_1 und e_1 und damit auch die übrigen in der zweiten Grundfläche liegend n Punkte bestimmt sind.

Zahl der Lösungen zwei.

Aufgabe 38. Auflösung. Man lege die Grundfläche in die **Pr. Eb. E_1** und bestimme die Spur S_1 der Deckfläche mittels der Längen m , n und p , siehe Aufgabe 22, Auflösung a. Durch S_1 lege man eine Ebene unter dem

dass eine Seitenfläche $abab$ in der **Pr. Eb.** E_1 liegt, während E_2 senkrecht zur Prismenrichtung steht, so lässt sich aus der fertigen Figur folgendes ermitteln.

Zunächst bestimme man die Schnittlinie S beider Grundflächen, so kann man mittels der gegebenen Längen $\overline{aa}$, $\overline{bb}$ und $\overline{dd}$ die zweite Projektion S_2 von S konstruieren, man braucht ja nur das gegebene Profil so zu zeichnen, dass eine Kante a_2b_2 mit der X -Achse zusammenfällt und die Strecken $\overline{a_2d_2}$ und $\overline{a_2b_2}$ in den äusseren Teilpunkten p_2 und q_2 nach den Verhältnissen $\frac{\overline{aa}}{\overline{dd}}$ und $\frac{\overline{aa}}{\overline{bb}}$ zu teilen, so gibt die Verbindungslinie p_2q_2 die Gerade S_2 .

Denkt man sich ferner etwa durch den Punkt a eine Ebene E' senkrecht zu S gelegt und deren Schnittlinie mit den beiden Grundflächen aufgesucht, unter Annahme der Ebene E' als **Pr. Eb.** E_4 und Bestimmung der vierten Projektionen von S , a und a , so erhält man nach Umlegung der Ebene E' in die **Pr. Eb.** E_2 ein Dreieck $S_4a_4a_4$, in welchem die Seiten a_4S_4 und a_4S_4 den Winkel W beider Grundflächen einschliessen, und von welchem lediglich die drei Höhen bekannt sind (die Seite a_4a_4 ist parallel zu S_2 , daher die zu ihr gehörige Höhe gleich dem Abstand des Punktes a_2 von S_2 , die beiden übrigen Höhen sind gleich den Entfernungen der Punkte a und a von den gegenüberliegenden Grundflächen und können mittels der gegebenen Länge $\overline{aa}$ und der beiden Winkel w_1 und w_1' konstruiert werden.) Um nun das Dreieck $S_4a_4a_4$ zu konstruieren, verschafft man sich zunächst ein demselben ähnliches Dreieck unter Benützung des planimetrischen Satzes, dass die Höhen eines Dreiecks sich zu einander verhalten wie die reciproken Werte der Seiten.

Zeichnet man nämlich durch einen beliebigen Punkt a einer Geraden A zu letzterer eine Senkrechte ab von ganz beliebiger Länge, macht ferner auf A die Strecken $\overline{ac}$, $\overline{ac_1}$, $\overline{ac_{11}}$ gleich den Höhen des Dreiecks $S_4a_4a_4$, zieht durch b Senkrechte zu den Linien bc , bc_1 und bc_{11} bis zum Schnitt d , d_1 , d_{11} mit A , so erhält man drei Strecken $\overline{ad}$, $\overline{ad_1}$, $\overline{ad_{11}}$ derart, dass folgende Beziehung stattfindet:

Es ist

$$\overline{ab}^2 = \overline{ac} : \overline{ad} = \overline{ac_1} : \overline{ad_1} = \overline{ac_{11}} : \overline{ad_{11}},$$

daher auch

$$\overline{ad} : \overline{ad_1} : \overline{ad_{11}} = \frac{1}{\overline{ac}} : \frac{1}{\overline{ac_1}} : \frac{1}{\overline{ac_{11}}}.$$

Winkel W_1 gegen die **Pr. Eb.** E_1 geneigt und ziehe durch die Ecken der Grundfläche Parallele zur gegebenen Richtung der Seitenkanten.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Konstruiert man demnach mit den drei Strecken $\overline{ad}$, $\overline{ad_1}$ und $\overline{ad_{11}}$ ein Dreieck $a_4'a_4'S_4'$ etwa gleich so, dass eine Seite und zwar jene, welche der zu S_2 gehörigen Höhe entspricht mit der durch a_2 gezogenen Parallelen zu S_2 zusammenfällt, so ist dieses Dreieck ähnlich dem Dreieck $a_4a_4'S_4$. Bestimmt man somit ein dem Dreieck $a_4'a_4'S_4'$ ähnliches Dreieck so, dass eine Ecke desselben auf S_2 liegt, so ist dieses letzte Dreieck dem Dreieck $a_4a_4'S_4$ kongruent und man kann nun den Neigungswinkel mit der Ebene E' mit der **Pr. Eb.** E_2 ermitteln aus einem rechtwinkligen Dreieck mit der Länge $\overline{a_1a_1}$ als Hypotenuse und a_4a_4 als Kathete. Der dieser Kathete anliegende Winkel, vermehrt um 90° , ist der gesuchte Winkel. Kennt man aber diesen, so bestimmt sich sofort aus q_2 und q_4 (q_4 fällt mit S_4 zusammen) der Punkt q_1 , und damit die Seitenfläche $a_1b_1a_1b_1$.

Zahl der Auflösungen höchstens vier.

Auflösung b. Behält man die **Pr. Ebn.**, wie in Auflösung a, bei, so ist im vorliegenden Falle, wenn etwa die Längen der Seitenkanten $\overline{aa}$ und $\overline{bb}$ gegeben sein sollen, zunächst der Punkt q_2 der Linie S_2 , ebenso wie im Fall a, bestimmbar. Ausserdem kennt man von dem Dreieck $S_4a_4a_4$ die durch die Ecken a_4 und a_4 gezogenen Höhen, sowie den der dritten Seite a_4a_4 gegenüberliegenden Winkel W_1 . Das Dreieck $a_4a_4'S_4$ kann also konstruiert werden, wodurch sich dessen dritte Höhe und hiemit auch die Lage von S_2 ergibt, nämlich als Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit $\overline{a_2q_2}$ als Hypotenuse und der durch S_4 gehenden Dreieckshöhe als anderen Kathete. Alles Weitere erledigt sich wie im Fall a.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Auflösung c. Mittels der Grössen w_1 , w_1' , W_1 und der Länge der Seitenkante $\overline{aa}$ bestimmt sich zunächst das Dreieck $a_4a_4'S_4$ jedoch nur seiner Gestalt, nicht auch seiner Lage nach.

Da ausser der Länge $\overline{aa}$ auch noch der Winkel W_1' der Grundfläche $abcd$ mit der Seitenfläche $aba'b$, d. h. mit der **Pr. Eb.** E_1 gegeben ist, so bestimmt sich aus der Entfernung h_a des Punktes a von der Ebene $abcd$ und dem Winkel W_1' die Entfernung der Spur a_1b_1 der Ebene $abcd$ von dem Punkte a, und zwar als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Entfernung h_a als Kathete und dem Winkel W_1' als gegenüberliegenden Winkel. Hiedurch ist aber weiter die Lage von a_1b_1 selbst als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\overline{a_1a_1}$ als

Hypotenuse und der eben konstruierten Entfernung als zweiten Kathete konstruierbar. Nunmehr kann durch $a_1 b_1$ die Ebene $abcd$ unter dem gegebenen Winkel zur **Pr. Eb.** E_1 geneigt gelegt werden und es lassen sich die ersten Projektionen der Eckpunkte der Grundfläche bestimmen.

Zur Verzeichnung der zweiten Grundfläche kennt man einerseits ihren Winkel W_1 mit der ersten, sowie ihre Entfernung von dem Punkte a_1 . Mittels W_1 ergibt sich als geometrischer Ort für diese Grundfläche ein senkrechter Kreiskegel, der die von a_1 zur Ebene $abcd$ gefällte Senkrechte $a_1 m$ als Achse und den Complementswinkel von W_1 als Oeffnungswinkel besitzt. Dieser Kegel schneidet die Ebene $abcd$ nach einer Kreislinie K mit dem Mittelpunkte m , an welchen die Schnittlinie S Tangente sein muss.

Denkt man sich ferner um a_1 eine Kugel mit der Entfernung des Punktes a von der Ebene $abcd$ als Halbmesser beschrieben, so schneidet dieselbe die Ebene aam nach einem Kreise K' und man kann sich nun einen zum Kegel Ka parallelen Kegel denken, dessen Achse durch a senkrecht zur Ebene $abcd$ geht und dessen in der Ebene aam befindlichen die Kreislinie K' berührenden Mantellinien die Spitze a' des Kegels bestimmen. Die Verbindungslinie aa' schneidet die Ebene $abcd$ in einem Punkte s , durch welchen die Schnittlinie S nunmehr als Tangente an den Kreis K gezogen werden kann.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Auflösung d. Mittels der gegebenen Längen m, n und p findet sich die Lage von S_2 wie im Fall a und hiedurch der Punkt q_2 von S_2 . Da ferner die Winkel w_1, w_1' und W_1 gegeben sind, so lässt sich zunächst ein dem Dreieck $S_4 a_4 a_1$ ähnliches Dreieck und aus letzterem mit Rücksicht auf die bekannte zur Seite $a_4 a_1$ gehörige Höhe das Dreieck $S_4 a_4 a_1$ selbst konstruieren, aus welchem sich mittels der beiden übrigen Höhen im Verein mit den Winkeln w_1 und w_1' die Länge der Seitenkante $\overline{aa}$ ermitteln lässt. Die Linie $a_1 b_1$ bestimmt sich nun wie im Fall c, hiedurch der Punkt q_1 und die Linie $a_1 b_1$. Aus den Entfernungen der Punkte a_1 und a_1 von $a_1 b_1$ bzw. $a_1 b_1$ und den Dreieckshöhen durch a_4 und a_4 ergeben sich schliesslich die Winkel der beiden Grundflächen mit der Seitenfläche $aba b$.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Aufgabe 39. Auflösung. Bestimmt man einen Normalschnitt (Profil) des Prismas, so ist dessen Flächeninhalt F^0 mit dem gegebenen Flächeninhalt F verbunden durch die Beziehung $F^0 = F \cdot \cos W$, wobei W den Winkel der gesuchten Ebene mit der Normalschnittebene bezeichnet. Aus F^0 und F bestimmt sich aber der Winkel W . Die Aufgabe ist daher zurückgeführt auf die: Es ist durch eine Gerade eine Ebene zu legen, welche mit einer gegebenen Ebene einen Winkel von vorgeschriebener Grösse einschliesst. Der Winkel W findet sich am einfachsten in folgender Weise. Verwandelt man die beiden Flächeninhalte F^0 und F in Quadrate mit den Seitenlängen l^0 und l , so findet die Beziehung statt

$$\frac{l^{02}}{l^2} = \cos W.$$

Zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $AB = 2l$ und $AC = l$, ferner ein zweites rechtwinkliges ADE , dessen Katheten $AD = 2l^0$ und $AE = l^0$ mit den Katheten AB und AC sich decken, zieht BE und durch D eine Parallele DF zu BE bis zum Schnitt F auf AC , so ist $\frac{AF}{AC} = \cos W$, denn es ist

$$\text{zunächst } \triangle ABC = \frac{2l \cdot l}{2} = l^2, \text{ ebenso } \triangle ADE = \frac{2 \cdot l^0 \cdot l^0}{2} = l^{02}, \text{ ferner } \triangle ABF = \triangle ADE.$$

Nun verhalten sich aber nach einem bekannten planimetrischen Satze die Inhalte von Dreiecken mit gleicher Grundlinie wie die zugehörigen Höhen, d. h. es findet die Verhältnissgleichheit statt:

$$\frac{\triangle ABF}{\triangle ABC} = \frac{AF}{AC} = \frac{l^{02}}{l^2} \text{ oder } \frac{AF}{AC} = \cos W.$$

Beschreibt man über AC einen Halbkreis und macht die Sehne $AG = AF$, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck AGC bei A der Winkel W enthalten.

Aufgabe 40. Auflösung. Man bestimmt sich zunächst wieder das Profil des Prismas, und erhält hiefür ein rechtwinkliges Dreieck $a^0 b^0 c^0$, welches als rechtwinklige Projektion eines dem gegebenen Dreieck ähnlichen Dreiecks aufgefasst werden kann. Man hat daher die Aufgabe 119, I. Teil.

Aufgabe 41. Auflösung. Durch die Bedingung, dass die Pyramide sechseckig und die Grundkanten halb so gross sein sollen als die Seitenkanten, findet sich der Winkel der Pyramidenachse mit der gegebenen Seitenkante. Man findet nun die Lage der Achse gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 als dritte Kante eines Dreikants, dessen übrige Kanten durch die gegebene Kante sa , sowie die durch s zur **Pr. Eb.** E_2 gezogene Projizierende gebildet sind. Man hat somit den ersten Dreikantsfall. Bestimmt man nun nach Herstellung der Pyramide den Halbierpunkt ihrer Höhe und legt durch ihn eine Ebene unter den vorgeschriebenen Winkeln gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 geneigt, siehe Aufgabe 99, I. Teil, so lässt sich deren Schnitt mit der Pyramide nach Massgabe der Angaben in Antwort der Frage 34 konstruieren.

Aufgabe 42. Auflösung. Man verschafft sich zunächst das Parallelepipiped wie in Aufgabe 97, I. Teil, die Längen der Seitenkanten als beliebig vorausgesetzt, und löst die Aufgabe so wie in Antwort der Frage 25 angegeben ist.

Aufgabe 43. Auflösung a. Man führe durch die gegebene Kante ab eine Ebene parallel zur **Pr. Eb.** E_1 , lege dieselbe in die **Pr. Eb.** E_1 um und konstruiere die Projektionen des Tetraëders für ein Projektionssystem IV—V, für welches **Pr. Eb.** E_1 mit E_2 zusammenfällt, **Pr. Eb.** E_3 aber senkrecht zu Kante ab

steht. Aus der vierten und fünften Projektion bestimme die erste und zweite.

Auflösung b. Lege durch ab eine Ebene unter dem gegebenen Winkel gegen die **Pr. Eb.** E_1 geneigt und verfähre im übrigen wie in Auflösung a.

Zahl der Lösungen zwei.

Aufgabe 44. Aus der gegebenen Länge der Hauptdiagonale bestimmt sich in jedem der vier Fälle a bis d sowohl die Länge als auch die Neigung einer Körperkante zur Hauptdiagonale, und zwar

Auflösung a aus einem gleichschenkligen Dreieck mit der Länge $\overline{ab}$ als Grundlinie, in welchem sich die Höhe zur Schenkellänge verhält wie $1 : \sqrt{2}$, vergl. Figur 63 b.

Auflösung b. Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck mit $\overline{ab}$ als Hypotenuse dessen Katheten sich verhalten wie die Fünfecksdiagonale zur Fünfecksseite, vergl. Figur 64.

Auflösung c. Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck mit der gegebenen Strecke $\overline{ab}$ als Hypotenuse, so dass die von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte diese im Verhältnis $1 : 2$ teilt, vergl. Figur 65.

Auflösung d. Man teilt die Strecke $\overline{ab}$ in drei gleiche Teile und eine der äusseren Teilstrecken nach dem goldenen Schnitt. Auf der Senkrechten durch den sich ergebenden Teilpunkt liegt die dritte Ecke eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\overline{ab}$ als Hypotenuse.

Hat man sich auf die eben angegebene Weise sowohl die Kantenlänge als auch ihre Neigung gegen die gegebene Diagonale $\overline{ab}$ verschafft, so bestimmt sich die Lage einer der durch a gehenden Körperkanten zu den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 als Kante eines Dreikants, dessen übrige Kanten die gegebene Diagonale, sowie die Projizierende durch a zur **Pr. Eb.** E_1 sind, nach dem ersten Dreikantsfall.

Nunmehr legt man die durch die Diagonale und die konstruierte Kante bestimmte Ebene in die **Pr. Eb.** E_1 um und ermittelt im Projektionssystem IV—V, für welches **Pr. Eb.** E_4 mit E_1 zusammenfällt, **Pr. Eb.** E_5 aber senkrecht zur Diagonale ab steht, die Projektionsformen des Körpers. Aus der vierten und fünften Projektion bestimmt man die erste und zweite.

Zahl der Lösungen zwei.

Aufgabe 45. Auflösung. Man legt durch die gegebene Kante ab eine Ebene unter dem vorgeschriebenen Winkel zur **Pr. Eb.** E_1 geneigt, legt dieselbe in die **Pr. Eb.** E_1 um und verfährt im übrigen wie in Aufgabe 43.

Zahl der Lösungen zwei.

Aufgabe 46. Auflösung. Man zeichne durch a eine Gerade unter den gegebenen Winkeln zu den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 geneigt, siehe Aufgabe 73, I. Teil, lege hierauf durch die so hergestellte Gerade eine Ebene wie in der Aufgabe verlangt und verfare im übrigen wie in Aufgabe 43.

Zahl der Lösungen höchstens acht.

Aufgabe 47. Auflösung. Legt man durch den Mittelpunkt von ab eine zu ab senkrechte Ebene, so liegt in dieser Ebene die Verbindungsline der beiden übrigen Tetraëder-ecken. Da man ausserdem ihre Länge, sowie die ihrer ersten Projektion kennt, so ist ihr Winkel mit der **Pr. Eb.** E_1 bestimmt. Bezüglich des Weiteren vergl. Aufgabe 104, I. Teil.

Aufgabe 48. Auflösung. Die gesuchte Ecke c , welche in der gegebenen Ebene ST liegen soll, befindet sich ausserdem in der durch den Halbpunkt m von ab senkrecht zu ab geführten Ebene, also in der Schnittlinie beider Ebenen. Auf dieser Schnittlinie ist nun der Punkt c so zu konstruieren, dass seine Entfernungen von a und b der Tetraëderkante ab gleich sind, siehe Aufgabe 33, I. Teil. Ist auf die Weise die Ecke c bestimmt, so verfare man im übrigen wie in Aufgabe 43.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Aufgabe 49. Auflösung. Durch den Mittelpunkt m von ab führe man eine Ebene senkrecht zu ab und zeichne in derselben eine Gerade, welche die unter a oder b genannten Bedingungen erfüllt. Aus der Länge von ab bestimmt sich die Länge der Körperkante wie früher. Man hat daher nur noch in der zu ab senkrechten Ebene ein Quadrat zu zeichnen mit dem Mittelpunkte m , dessen Seite gleich der Oktaëderkante ist, und welche parallel zu der oben konstruierten Linie läuft.

Zahl der Lösungen zwei.

Aufgabe 50. Auflösung. In jedem der Fälle a bis d lässt sich leicht der Winkel ermitteln, welchen die zweite Hauptdiagonale mit der ersten einschliesst, vergl. die Figuren 63, 64, 65 und 66. Man hat daher, um die Ebene zweier Hauptdiagonalen zu bestimmen, nur durch den Mittelpunkt m von ab eine Gerade zu zeichnen, welche die erste Diagonale unter einem dem darzustellenden Körper entsprechenden Winkel schneidet und gegen die **Pr. Eb.** E_1 oder E_2 unter dem vorgeschriebenen Winkel w geneigt ist. Im übrigen verfährt man wie in Aufgabe 44.

Zahl der Lösungen zwei.

Aufgabe 51. Aus der gegebenen Kantenlänge bestimmt sich zunächst für jeden der Körper die Länge der Hauptdiagonale. Die Gegenecke zu a liegt nun in einer durch b senkrecht zu ab geführten Ebene, ausserdem in der gegebenen Ebene somit in der Schnittlinie beider und steht vom Punkte a um die Länge der Hauptdiagonale ab, daher Aufgabe 33, I. Teil.

Zahl der Lösungen zwei.

Aufgabe 52. Auflösung a. Man fälle von dem gegebenen Punkte m eine Senkrechte zur Ebene ST , so ist deren Fusspunkt Mittelpunkt der in der Ebene ST liegenden Begrenzungsfläche. Mittels des gegebenen Winkels findet man ferner die Richtung einer in der Ebene ST liegenden Körperkante, deren Länge sich aus der Länge der vom Punkte m auf die Ebene ST gefällten Senkrechten (Halbmesser der dem Körper einbeschriebenen Kugel) konstruieren lässt, vergl. die Figuren 62 bis 66, sowie Erkl. 90.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Auflösung b. Durch den gegebenen Abstand einer der in Ebene ST liegenden Ecken erhält man einen geometrischen Ort für diese

Aufgabe 53. Auflösung a. Man lege durch m und A eine Ebene, so ist dieselbe Diagonalebene für das reguläre Polyeder und es lässt sich nun mittels den Beziehungen zwischen der Entfernung des Körpermittelpunktes m von den Kanten des Körpers zur Kantenlänge (Halbmesser der anbeschriebenen Kugel, siehe Erkl. 90) letztere konstruieren; im übrigen verfare wie in Aufgabe 44.

Zahl der Lösungen zwei.

Auflösung b. Aus der Form des Körpers kennt man den Winkel zwischen den Geraden ma und mb . Man hat also nur in der Ebene mB eine Gerade unter dem genannten Winkel gegen die Gerade ma geneigt zu ziehen, wodurch im Verein mit der

Ecke in der Schnittlinie der parallel zur bezüglichen **Pr. Eb.** im gegebenen Abstand geführten Ebene mit der gegebenen Ebene. Ausserdem kennt man die Entfernung des Flächenmittelpunktes von der oben genannten Ecke aus der Lage der Senkrechten durch m zur Ebene ST .

letzteren Linie wieder eine Diagonalebene des Körpers bestimmt ist.

Zahl der Lösungen zwei.

Aufgabe 54. Auflösung. Das gegebene Dreieck stellt die Projektion eines gleichseitigen Dreiecks dar. Man verschafft sich nun den Winkel zwischen der **Pr. Eb.** E_1 oder E_2 mit der Ebene jenes Dreiecks, dessen Projektion gegeben ist, siehe Aufgabe 119, I. Teil. Mittels des gegebenen Abstandes des Mittelpunktes m von der betreffenden **Pr. Eb.** ist dann die Lage des Körpers gegen die **Pr. Ebn.** vollständig bestimmt.

Zahl der Lösungen vier.

Aufgabe 55. Auflösung. In gleicher Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe, verschafft man sich den Winkel der Ebene jenes Dreiecks, dessen Projektion gegeben mit der gleichnamigen **Pr. Eb.** Durch den gegebenen Abstand der Ecke a bestimmt sich dann wieder die Lage des Körpers gegen die **Pr. Ebn.**

Zahl der Lösungen vier.

Aufgabe 57. Auflösung. Konstruktion des Polyeders VIII.

Sind abc und abd zwei längs der Kante ab zusammenstossende Ikosaëderflächen, mit den Mittelpunkten m und m' , heisst ferner das in der Dreiecksfläche abc liegende zum archimedischen Polyeder gehörige Sechseck $efghik$, so laufen dessen Gegenseiten (je zwei durch eine Seite getrennte Seite) parallel zu den Seiten des Dreiecks abc und es treffen die Verbindungslinien me und mf die Kante ab in zweien Punkten 1 und 2, in welchen die Strecke $\overline{ab}$ in drei gleiche Teile geteilt ist. Um nun die Ebene der an die Kante ef anstossenden quadratischen Begrenzungsfläche zu erhalten, braucht man nur das Tetraëder $m, 1, m', 2$, so zu schneiden, dass die Schnittpunkte mit den Kanten $\overline{m1}$, $\overline{m'1}$, $\overline{m2}$, $\overline{m'2}$ die Ecken eines Quadrates bilden, zu welchem Zwecke man

die genannten Kanten in dem Verhältnis $\frac{mm'}{1.2}$

zu teilen hat, siehe auch Aufgabe 126 a, I. Teil. Sind auf diese Weise die Sechseckseiten ef und $e'f'$ in den Ebenen abc und abd der Lage nach bestimmt, so lässt sich über ef in der Ebene abc ein reguläres Sechseck $efghik$ zeichnen, dem in der Ebene abd affin ein Sechseck $e'f'g'h'i'k'$ entspricht. Die in den übrigen Ikosaëderflächen liegenden Sechsecke ergeben sich dann in ähnlicher Weise wie die Zehnecke in den Dodekaëderflächen der Figur 73.

Konstruktion des Polyeders XIII.

Sind wieder abc und abd zwei längs der Kante ab aneinanderstossende Ikosaëderflächen mit den Mittelpunkten m und m' , heisst ferner das in der Fläche abc liegende zum archi-

Aufgabe 58. Auflösung. Um aus den Netzen die Projektionsformen der archimedischen Polyeder zu erhalten, nehme man eine der **Pr. Ebn.** zusammenfallend mit einer der Begrenzungsflächen des fraglichen Körpers an und erhält nun die Projektionen der von einer Ecke dieser Fläche ausgehenden Kanten durch Drehung der übrigen an dieser Ecke zusammenstossenden Flächen um ihre Schnittlinien mit der bezüglichen **Pr. Eb.** bis zum Zusammentreffen gleichnamiger Kanten im Raume.

medischen Polyeder gehörige Dreieck efg , so laufen dessen Seiten parallel zu den Seiten des Dreiecks abc und man erhält die Ebene der an die Kante ef anstossenden quadratischen Begrenzungsfläche, durch Teilung der Kanten $\overline{ma}$, $\overline{mb}$, $\overline{m'a}$ und $\overline{m'b}$ des Tetraëders m, a, m', b in dem Verhältnis $\frac{mm'}{ab}$. Ueber $\overline{ef}$ konstruiert

man nun in der Ebene abc das gleichseitige Dreieck efg , dem in Ebene abd affin das Dreieck $e'f'g'$ entspricht.

Aufgabe 59. Heisst $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ die gegebene Grundfläche und sind etwa noch die Seitenflächen $abab$ und $bcbcb$ gegeben, so bestimmen dieselben zunächst die Lage der Punkte a, b, c und damit auch jene der Deckfläche gegen die Grundfläche.

Auflösung a. Sind die Neigungswinkel der Seitenflächen $dede$ und $efef$ gegeben, so ergibt sich die Kante ee als Schnittlinie der unter den gegebenen Neigungswinkeln zur Grund- oder Deckfläche durch die Kanten de und ef gelegten Ebenen. Die noch fehlenden Kanten dd und ff bestimmen sich als Schnittlinien der Seitenflächen $cdcd$, $eded$ und $afaf$, $fefe$.

Zahl der Lösungen zwei.

Auflösung b. Kennt man etwa die Neigungswinkel der Kanten dd und ee , so ist durch den Winkel der ersteren Kante, deren Lage in der Ebene $cdcd$ und hiemit zugleich die Lage der Ebene $dede$ bestimmt, wodurch mittels des zweiten Winkels auch die Lage der Kante ee sich ergibt. Die noch fehlende Kante ff erhält man als Schnittlinie der Ebenen $fefe$ und $afaf$.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Auflösung c. Kennt man etwa die Winkel der Seitenflächen $cdcd$, $eded$ und $efef$, so geben dieselben die Lage der letzteren beiden Flächen gegen die Grund- oder Deckfläche an und durch ihre gegenseitigen Schnittlinien bestimmen sich die noch fehlenden Seitenkanten.

Zahl der Lösungen höchstens vier.

Auflösung d. Ist der Winkel der Seitenkante ee mit den beiden Grundflächen gegeben, so ist hiedurch deren Lage gegen die beiden Grundflächen bestimmbar, siehe Aufgabe 53, I. Teil. Kennt man aber die Kante ee , so sind hiedurch die beiden Ebenen $eded$ und $efef$ gegeben, deren Schnittlinien mit den gleichfalls hinsichtlich ihrer Lage gegen die **Pr. Eb.** E_1 bekannten Ebenen $bcbcb$ und $afaf$ die noch fehlenden Seitenkanten bestimmen.

Zahl der Lösungen höchstens acht.

Aufgabe 60. Auflösung. Man nehme die **Pr. Eb.** E_1 mit der Ebene der einen Grundfläche zusammenfallend, die **Pr. Eb.** E_2 senkrecht zu beiden Grundflächen an, so kann man die zweiten Projektionen dieser Grundflächen mittels des gegebenen Winkels unmittelbar zeichnen, desgleichen lassen sich infolge der gegebenen Neigungswinkel und Längen die Lagen der $n-1$ Seitenkanten in der zweiten Projektion, sowie auch die Richtungen ihrer bezüglichen ersten Projektionen darstellen. Nimmt man nun die erste Projektion einer der Kanten etwa $a_1 a_1$ parallel zur konstruierten Richtung, sonst aber beliebig an, so bestimmen sich die ersten Projektionen der beiden mit aa in einer Seitenfläche liegenden Kanten bb und ff mittels Zuhilfenahme der Schnittpunkte der bezüglichen zweiten Projektionen $b_2 b_2$ und $f_2 f_2$ mit $a_2 a_2$, welche auf $a_1 a_1$ projiziert Punkte der gesuchten Kantenprojektionen $b_1 b_1$ und $f_1 f_1$ liefern.

Aufgabe 61. Auflösung. Man nehme eine der Quadratseiten etwa ab als Projektion einer projizierenden Ebene E_1 oder E_2 und projiziere parallel zu einer zweiten Quadratseite ac den Würfel in die genannte Ebene, so erhält man unmittelbar im Schnitt von ab mit den Parallelprojektionen der Würfelkanten die Parallelprojektionen der Durchschnittspunkte.

Aufgabe 62. Auflösung. Man benütze eine der die Gerade enthaltenden projizierenden Ebenen und verfähre im übrigen wie in Antwort der Frage 65.

Aufgabe 62 a. Auflösung. Man projiziere das Oktaeder parallel zur Prismenrichtung in eine Prismengrundfläche und verfähre im übrigen wie früher.

Aufgabe 62 b. Auflösung. Man projiziere entweder das Oktaeder central durch die Pyramidenspitze in die Ebene der Grundfläche der Pyramide und verfähre im übrigen wie in Antwort der Frage 24 zweites Konstruktionsverfahren, oder man projiziere Pyramide und Dodekaeder parallel zu einer Kante des letzteren in die Ebene der Pyramidengrundfläche und verfähre wie in Antwort der Frage 24 erstes Konstruktionsverfahren.

Aufgabe 63. Auflösung. Man bestimme nacheinander die Schnittpunkte der Kanten des einen Körpers mit den Flächen des anderen und verbinde die erhaltenen Punkte nach Massgabe der Erkl. 56.

Aufgabe 64. Auflösung. Sind $abcd$ und $abcd$ zwei parallele Würfelebenen, so nehme man die Punkte a und a als Ecken der beiden Tetraeder, so gehören zu ersterem Tetraeder die Ecken a, b, c, d , zu letzterem die Ecken a, b, c, d . Je zwei in der nämlichen Würfelebene liegenden Diagonalen schneiden sich in Punkten der Schnittfigur, deren Kanten einem regulären Oktaeder angehören.

Aufgabe 65. Auflösung. Man zeichne die fünf Hexaeder wie in der Aufgabe angegeben und bestimme die Schnittlinien der einzelnen Würfelflächen unter Berücksichtigung des Umstandes, dass an jeder Dodekaederecke zwei Hexaeder aneinanderstossen, sowie dass in jeder Dodekaederfläche die fünf Diagonalen, als Kanten der fünf Hexaeder sich treffen und Punkte der Durchschnittsfigur, welche mit den entsprechenden Dodekaederecken zu verbinden sind, ergeben. Zur leichteren Uebersicht ist es zweckmässig, die einzelnen Hexaeder mit verschiedenen Farben, etwa schwarz, rot, blau, gelb und grün, zu zeichnen.

Aufgabe 68 u. 69. Auflösung. Man verfähre genau ebenso, wie in den beiden Aufgaben 66 und 67, d. h. man konstruiere in Aufgabe 68 das Schlagschattenpolygon auf die **Pr. Eb. E_1** als ein der ersten Projektion des n -Ecks kongruentes n -Eck und zeichne hierauf den Schlagschatten auf E_2 als affine Figur zum Schlagschatten auf die **Pr. Eb. E_1** .

In Aufgabe 69 zeichne man den Schlagschatten auf die **Pr. Eb. E_1** als affine Figur zur ersten Projektion des n -Ecks.

Aufgabe 79. Man konstruiere nach Massgabe der in den Anmerkungen 22, 23, sowie in den Antworten der Fragen 37 und 39 angegebenen Verfahren die diesbezüglichen Projektionen der in Rede stehenden Körper und bestimme deren Selbstschattengrenze nach dem in Antwort der Frage 74 angegebenen Verfahren und hieraus den Schlagschatten auf die **Pr. Ebn. E_1 und E_2** .

Aufgabe 80. Bestimme die Selbstschattengrenze wie in Antwort der Frage 74 und hieraus den Schlagschatten.

I. M a t h e m a t i k.

(Grundrechnungsarten, Algebra, Geometrie, Stereometrie, Astronomie, Nautik.)

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Erstes Buch: Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen. Mit 71 Erkl. und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von A. Frömter. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Zweites Buch: Das Rechnen mit benannten Zahlen. Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Frömter und Neubüser. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Drittes Buch: Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.) Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von J. G. Maier. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen (Elemente der Buchstabenrechnung), der Verhältnisse und Proportionen. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von H. Staudacher. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen. Zweiter Teil: Elemente der Zahlenlehre. Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen. Mit einer Sammlung von 277 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von Prof. Hans Staudacher. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Erster Teil: Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldeetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen. Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer Münz-, Mass- und Gewichtstabelle. Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Richard Olbricht. Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Zweiter Teil: Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente. Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsenberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet von Dr. R. Olbricht. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Adolf Kleyer. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

- Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten.** Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Otto Prange**. Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.
- Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades.** (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des **Bachez de Méziriac**, im französischen Originale mit beigefügter deutscher Übersetzung. Bearbeitet zum Teil nach **System Kleyer** von **W. Fr. Schüler**. Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.
- Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten** (Quadratische Gleichungen). Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Dr. Aug. Blind**. Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit zwei und mehreren Unbekannten.** (Quadratische Gleichungen.) Sammlung von 361 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 185 Erklärungen und 8 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger**. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades.** Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der Körperberechnungen.** Erstes Buch: Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 Figuren. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der Körperberechnungen.** Zweites Buch: Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.
- Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.** Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erklärungen und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. K. J. Bobek**. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Von **Dr. K. J. Bobek**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen,** nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der Kombinatorik.** Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen. (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Übungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren. Von **Prof. H. Staudacher**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Verlag von L. v. Vangerow in Bremerhaven.

- Lehrbuch der Logarithmen** nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.
- Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln** nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von **Ad. Kleyer**. Preis: in einfachem Leineneinband Mk. 2.50.
- Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen** nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von **E. R. Müller**. Preis: kartonniert 60 Pfg.
- Lehrbuch der Integralrechnung. Erster Teil:** Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.
- Lehrbuch der Integralrechnung. Zweiter Teil:** Anwendung der bestimmten Integrale auf Quadratur, Rektifikation, Komplanation und Kubatur, sowie auf zahlreiche gelöste praktische Aufgaben aus der **Mechanik und Technik**. Mit 245 vollständig gelösten Aufgaben, 163 Figuren und 137 Erklärungen, nebst ausführlichem Formelverzeichnis. Zum Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet von **Prof. Dr. Haas**. Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.
- Lehrbuch der Differentialrechnung. Erster Teil:** Die einfache und wiederholte Differentiation explizierter Funktionen von einer unabhängigen Variablen. Ohne Anwendung der Grenzen und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben und Formelverzeichnis. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Lehrbuch der Differentialrechnung. Zweiter Teil:** Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwickelungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima. Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren, 230 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas**. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.
- Lehrbuch der Differentialrechnung. Dritter Teil:** Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 Figuren, 138 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas**. Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.
- Einführung in die Funktionentheorie. Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.** Mit 23 Figuren. Von **Dr. W. Láska**. Preis: Mk. 1.50. In einfachem Leinenband Mk. 2.—.
- Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie.** Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Übungsaufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt**. Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.
- Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen.** Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer**. Von **Richard Krüger**. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. Erster Teil:** Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach **System Kleyer**. Von **Dr. G. Weichold**. Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Erster Teil: Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 1.80. Geb. nur mit Teil II zus. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Zweiter Teil: Der Winkel und die parallelen Linien.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer. Von **Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. 2.20. Geb. nur mit Teil I zus. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Dritter Teil: Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 Figuren. Bearbeitet von **Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Vierter Teil: Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Örter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Fünfter Teil: Die Flächen der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Sechster Teil: Proportionalität der Strecken.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Siebenter Teil: Die Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 394 Erklärungen und 76 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Achter Teil: Die Anwendung der Ähnlichkeit auf die Lehre vom Kreis.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 505 Erklärungen und 135 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Tabelle der Elemente der regelmässigen Vielecke.** Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. —.50.
- Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil: Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Dr. H. Seipp**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Erster Teil: Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerkungen, 207 Erklärungen und 214 in den Text gedruckten Figuren. Von **E. R. Müller**. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Zweiter Teil: Aufgaben, gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre. Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 Figuren. Bearbeitet von E. R. Müller. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Dritter Teil: Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren. Mit 510 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 Figuren. Bearbeitet von Prof. E. R. Müller. Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Erster Teil: Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden. Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Übungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Heinr. Cranz. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Zweiter Teil: Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades. Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Übungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Heinr. Cranz. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie). Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen, zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren. Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Faches, sowie zum praktischen Gebrauch für Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte usw. Von Dr. W. Láska. Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von Richard Klimpert. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben. Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach System Kleyer durchaus neu bearbeitet. Zweite Auflage. Von Prof. Heinr. Cranz. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erklärungen, 563 in den Text gedruckten Figuren und 65 Anmerkungen nebst einem ausführlichen Formelverzeichnis von über 500 Formeln. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 18.—. Geb. Mk. 19.50.

Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre) mit 307 Erklärungen und 52 Figuren nebst einer Sammlung von 513 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Erster Teil: Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 361 Erklärungen und 97 Figuren. Von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

- Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).** Zweiter Teil: Harmonische Gebilde. Entstehung der Kegelschnitte. Sätze von Pascal und Brianchon. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 445 Erklärungen und 135 in den Text gedruckten Figuren. Von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der proektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).** Dritter Teil: Polarität und Mittelpunktseigenschaften der Kurven. Involution und Brennpunktseigenschaften der Kurven. Von Prof. Dr. J. Sachs. (Unter der Presse.)
- Lehrbuch über den binomischen Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und der endlichen und unendlichen Reihen.** Bearbeitet von Professor Dr. A. Haas. — Befindet sich unter der Presse. —
- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Erster Teil: Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 Figuren. Bearbeitet von J. Vonderlinn. Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.
- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Zweiter Teil: Über die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper. Mit 130 Erklärungen und 99 Figuren. Bearbeitet von J. Vonderlinn. Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.
- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Dritter Teil: Erste Hälfte: Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie. Mit 195 Erklärungen und 169 Figuren. Bearbeitet von J. Vonderlinn. Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.
- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Dritter Teil: Zweite Hälfte: Centralcollimation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. Mit 218 Erklärungen und 210 Figuren. Von J. Vonderlinn. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Vierter Teil: Erste Hälfte: Krumme Linien (ebene und räumliche Kurven). Krumme Oberflächen. Schatten- und Beleuchtungslehre. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Vierter Teil: Zweite Hälfte: In Bearbeitung, erscheint 1904.
- Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. W. Láska. Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.
- Lehrbuch der sphärischen und theoretischen Astronomie und der mathematischen Geographie.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Mit 328 Erklärungen, Formelverzeichnis, 148 in den Text gedruckten Figuren und 2 Tafeln. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. W. Láska. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Die Nautik in elementarer Behandlung.** Einführung in die Schiffahrtskunde. Zur Förderung des Verständnisses der Schiffahrt in weiteren Kreisen, sowie zum Unterricht an Lehranstalten. Mit 90 vollständig gelösten Beispielen, 260 analogen ungelösten Aufgaben mit den Ergebnissen, nebst 88 Figuren, sowie Erklärung der Kunstausrücke der Seemannssprache. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Fr. Bolte, Direktor der Navigationsschule in Hamburg. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

II. Physik, Elektrizität, Chemie.

- Lehrbuch der allgemeinen Physik. (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.)**
Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.
- Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper.**
Mit 35 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.
- Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus** nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben, erläutert durch 189 in den Text gedruckte Figuren und 10 Karten. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen.** Mit 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Hovestadt. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik)** mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.
- Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik)** mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.
- Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper.** Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.
- Lehrbuch der Elastizität und Festigkeit** mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 5.50. Geb. Mk. 6.50.
- Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik)** mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 13.50. Geb. 14.50.
- Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Erster Band:**
Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter, sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen. Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.
- Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Zweiter Band:**
Erste Hälfte: Die Bewegungserscheinungen des Wasser in Kanälen und Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss und Widerstand. Mit 282 Erklärungen, mehr als 150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 124 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

- Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik).** Zweiter Band: Zweite Hälfte: Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger. Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 3.50 Geb. Mk. 4.50.
- Lehrbuch der Reibungselektrizität (Friktions-Elektrizität, statischen oder ruhenden Elektrizität),** erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.
- Lehrbuch der Kontaktelektrizität (Galvanismus)** nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Oscar May. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.
- Lehrbuch der Induktionselektrizität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik).** Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Ad. Krebs. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der Elektrodynamik.** Erster Teil: Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Oscar May. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.
- Lehrbuch des Elektromagnetismus.** Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. O. May und Ad. Krebs. Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.
- Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie.** Erster Band. Die Metalloide. Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Wilh. Steffen. Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—.
- Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie.** Zweiter Band. Die Metalle. Mit 573 Erklärungen 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Wilhelm Steffen. Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—.
- Darstellende Geometrie für Bauhandwerker.** Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Erster Teil: Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittlungen. Mit 258 Figuren. Bearbeitet von J. Vonderlinn, Dipl. und staatlich geprüfter Ingenieur. Preis: Mk. 3.—. In Schuleinband Mk. 3.30.
- Darstellende Geometrie für Bauhandwerker.** Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Zweiter Teil: Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmlings, Steinschnitt, Centralperspektive. Anhang: Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern. Mit 217 Figuren. Bearbeitet von J. Vonderlinn, Dipl. und staatlich geprüfter Ingenieur. Preis: Mk. 3.—. In Schuleinband Mk. 3.30.



Vonderlinn, Jakob

Lehrbuch des Projektionszeichnens für den Schulunterricht und das
Selbststudium bearbeitet nach System Kleyer

Bd.: 2

[1889]

Math.a. 324 m-2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650635-0